Outils Logiques – Partiel (durée : 2 h 30)

Documents autorisés : deux feuilles A4 recto-verso manuscrites et strictement personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1 (Sémantique) On considère le connecteur ternaire `nif` dont la table de vérité est la suivante :

x	y	z	$\texttt{nif}(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$

Chaque réponse aux questions suivantes devra être justifiée.

1. Démontrer ou réfuter chacune des affirmations suivantes (où $x, y, z \in V$) :
   (a) $\texttt{nif}(x,y,z) \models (\neg y \vee \neg z)$
   (b) $\neg\texttt{nif}(x,y,z) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} ((x \wedge y) \vee z)$
   (c) $\texttt{nif}(x,\neg y,\neg x) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (x \wedge y)$
2. Donner une formule p telle que $p \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \texttt{nif}(x,y,z)$, où les seuls connecteurs de p soient $\neg$ et $\wedge$.
3. (a) Donner une formule q telle que $q \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg x$, où le seul connecteur de q soit `nif`.
   (b) Donner une formule r telle que $r \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (x \wedge y)$, où le seul connecteur de r soit `nif`.
   (c) Que peut-on conclure sur le pouvoir expressif de `nif`, à partir des points 3(a) et 3(b) ?
   (d) Donner une formule s telle que $s \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (x \vee y)$, où le seul connecteur de s soit `nif`.

↓ **Exercice 2 (Modélisation)** Considérons les trois propositions suivantes :

x_S : «je passe un bac S»
x_L : «je passe un bac L»
x_M : «je deviens médecin»
x_J : «je deviens journaliste»

1. Écrire une formule pour modéliser chacune des phrases suivants :
   - F_A : «Je passe un bac S ou un bac L » ;
   - F_B : «Si je passe un bac S, alors je deviens médecin» ;

Peut ... place dans ... Donnez les

- F_C : «je ne passe pas un bac L ou je deviens journaliste» ;
- F_D : «Je ne deviens pas journaliste» ;

2. Les 4 formules sont-elles compatibles ? justifiez en donnant l'affectation qui rend toutes les formules vraies.
3. Est-ce que la formule F_C est conséquence logique de F_A et F_B ? justifiez.
4. Si toutes les variables propositionnelles sont fausses, quelle(s) formule(s) est(sont) fausse(s) ? justifiez.
5. Est-ce que toutes les formules sont falsifiables en même temps ? justifiez.
6. Modéliser aussi chacune des phrases suivantes :
   - F_E : «je deviens médecin uniquement si je ne deviens pas journaliste» ;
   - F_F : «je passe un bac L si et seulement si je deviens médecin ou journaliste» ;
   - F_G : «il n'est pas envisageable que je devienne journaliste et médecine en même temps» ;

Exercice 3 (Fonctions par récurrence et preuves par induction)

1. On considère la fonction g suivante :

$$\begin{array}{lcl} g(x) & := & \neg\neg x \\ g(\neg p) & := & (\neg g(p) \wedge ((y \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg z))) \\ g(p \vee q) & := & \neg(\neg g(p) \wedge \neg g(q)) \\ g(p \wedge q) & := & (g(p) \wedge g(q)) \end{array}$$

   Appliquer la fonction g à la formule $\neg(\neg x \wedge (y \vee z))$ en détaillant tous les appels récursifs de la fonction.

2. Définir une fonction f sur les formules propositionnelles qui enlève tous les symboles de négation, remplace tous les connecteurs $\vee$ par le connecteur $\wedge$ et tous les connecteurs $\wedge$ par $\Rightarrow$. Ainsi par exemple, l'application de la fonction f à la formule $p_0 = \neg(\neg x \wedge (y \vee z))$ devrait donner comme résultat $p_1 = (x \Rightarrow (y \wedge z))$.

   Montrer comment évaluer votre fonction f sur la formule p_0 en détaillant tous les appels récursifs de la fonction.

3. Considérons la fonction g définie dans le point 1. Montrer par induction structurelle que pour toute formule propositionnelle $\Phi \in Form$ on a $|g(\Phi)|_\wedge = |\Phi|_\vee + |\Phi|_\wedge + 2 \cdot |\Phi|_\neg$.

   Dans chaque cas de votre démonstration écrire clairement quelle est l'hypothèse d'induction et ce que vous voulez démontrer.