Outils Logiques – Examen Final (durée : 3 h)

*Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles.
Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.*

RÉDIGER IMPÉRATIVEMENT L'EXERCICE 2 DANS UNE FEUILLE INDÉPENDANTE.

Exercice 1 (Formes Normales)

- On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les formules obtenues à partir d'un ensemble de variables V et de l'ensemble d'opérateurs $\{\text{if}, \Rightarrow, \neg, \vee, \wedge\}$, où if est un connecteur ternaire. Donner une définition inductive de l'ensemble $\mathcal{G}$.
- On considère les règles de transformation suivantes sur les formules de l'ensemble $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \text{if}(X, Y, Z) &\rightsquigarrow ((X \Rightarrow Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Z)) \\ (X \Rightarrow Y) &\rightsquigarrow (\neg X \vee Y) \\ \neg\neg X &\rightsquigarrow X \end{aligned}$$

Écrire DEUX séquences de transformation complètes (jusqu'à la forme normale) que l'on peut obtenir à partir de la formule $\text{if}(\neg x, \text{if}(y, \neg y, \neg\neg y), y)$.

- On considère la fonction Φ sur les formules de l'ensemble $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &:= 1 \\ \Phi(\neg p) &:= \Phi(p) + 1 \\ \Phi(p \vee q) &:= \Phi(p) + \Phi(q) \\ \Phi(p \wedge q) &:= \Phi(p) + \Phi(q) \\ \Phi(p \Rightarrow q) &:= \Phi(p) + \Phi(q) + 3 \\ \Phi(\text{if}(p, q, r)) &:= 2\Phi(p) + \Phi(q) + \Phi(r) + 8 \end{aligned}$$

- Donner une formule p_0 telle que $\text{if}(\neg x, \text{if}(y, \neg y, \neg\neg y), y) \rightsquigarrow p_0$ et vérifier que $\Phi(\text{if}(\neg x, \text{if}(y, \neg y, \neg\neg y), y)) > \Phi(p_0)$.
- Montrer par induction la propriété suivante :
pour toute formule p de $\mathcal{G}$: si $p \rightsquigarrow q$, alors $\Phi(p) > \Phi(q)$.
- Comment conclure que toute séquence de transformations $\rightsquigarrow$ à partir d'une formule quelconque de l'ensemble $\mathcal{G}$ est de longueur finie ?

Exercice 2 (DPLL) On considère l'ensemble des variables propositionnelles V et l'ensemble de littéraux $L = \{x \mid x \in V\} \cup \{\neg x \mid x \in V\}$. On définit une fonction appelée *polarité* $p : L \rightarrow \{0, 1\}$ et une fonction appelée *sujet* $s : L \rightarrow V$ comme suit :

$$p(l) = \begin{cases} 0 & \text{si le littéral } l \text{ est } \neg x \\ 1 & \text{si le littéral } l \text{ est } x \end{cases} \quad s(l) = \begin{cases} x & \text{si le littéral } l \text{ est } \neg x \\ x & \text{si le littéral } l \text{ est } x \end{cases}$$

On définit également la *taille* d'une CNF c , notée $t(c)$, comme le nombre de littéraux de c .

On utilisera dans la suite la notation $c[x/b]$ vue en cours pour parler de l'évaluation partielle d'une CNF c par rapport à une variable $x \in V$ et au booléen $b \in \{0, 1\}$.

Étant donné une CNF c et un littéral l , on appellera *gain* de l dans c , noté $g_c(l)$, le nombre de littéraux qui "disparaissent" de c en appliquant soit l'évaluation partielle $c[x/1]$, si $l = x$, soit l'évaluation partielle $c[x/0]$, si $l = \neg x$. Plus formellement, la définition de $g_c(l)$ est la suivante :

$$g_c(l) = t(c) - t(c[s(l)/p(l)])$$

où t dénote la fonction taille et $c[s(l)/p(l)]$ est l'évaluation partielle de la CNF c par rapport à la variable $s(l)$ et au booléen $p(l)$.

Par exemple : si $c = d_1 \wedge d_2 \wedge d_3$, où $d_1 = (x \vee \neg y \vee z)$, $d_2 = (\neg x \vee y)$, et $d_3 = (x \vee \neg z)$, alors

$$t(c) = 7, \text{ et}$$

$$g_c(\neg x) = 7 - 3 = 4 \quad \text{car } s(\neg x) = x, \quad p(\neg x) = 0, \quad c[x/0] = ((\neg y \vee z) \wedge \neg z) \quad \text{et} \quad t((\neg y \vee z) \wedge \neg z) = 3$$

1. Soit c la CNF de l'exemple ci-dessus. Appliquez à c l'algorithme DPLL vu en cours. Donnez tous les appels récursif, ainsi que l'affectation trouvée à la fin de l'évaluation.
2. Soit à nouveau c la CNF de l'exemple ci-dessus. Pour tous les littéraux l apparaissant dans c , donnez $c[s(l)/p(l)]$ et $g_c(l)$ (en sachant que $c[s(\neg x)/p(\neg x)]$ et $g_c(\neg x)$ sont déjà donnés dans l'exemple).
3. On considère une version simplifiée de l'algorithme DPLL que nous noterons $DPLL_s$: si c ne contient aucune clause unitaire (on rappelle qu'une clause unitaire est une clause disjonctive contenant un unique littéral l), alors on choisit un pivot (pas de test de variable à polarité constante, donc). On considère aussi l'optimisation suivante de $DPLL_s$ notée $DPLL_s^{opt}$: lorsqu'ils existent plusieurs clauses unitaires $l_1, \dots, l_k$ dans c , on choisit une clause unitaire qui maximise le gain, c.à.d. on choisit un l_i tel que $g_c(l_i) \geq g_c(l_j)$, pour tout j . Appliquez $DPLL_s^{opt}$ à la CNF suivante :

$$x \wedge (x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge y$$

Donnez tous les appels récursif, ainsi que l'affectation trouvée à la fin de l'évaluation.

4. (Bonus) On dira que la complexité de l'exécution d'une version de DPLL sur une CNF c , notée $compl(c, DPLL)$, est la somme des tailles de toutes les CNF qui sont passées en argument aux différents appels récursifs de la fonction DPLL. Donc $compl(c, DPLL) = t(c) + t(c_1) + \dots + t(c_n)$, où c_n est un cas de base (soit la CNF True, soit une CNF contenant une clause disjonctive False). Montrer l'affirmation suivante, ou donnez un contre-exemple :

$$\text{pour toute CNF } c, \quad compl(c, DPLL_s^{opt}) \leq compl(c, DPLL_s)$$

Exercice 3 (Modélisation) Un ingénieur construit un nouveau modèle de bateau transatlantique qui est divisé en différents espaces de convivialité pouvant accueillir plusieurs passagers en même temps. Il s'agit de planifier la distribution de passagers lors de la première navigation du bateau, où il faut satisfaire quelques contraintes générales imposées par l'architecture du bateau, en même temps que les contraintes particulières exigées par ses clients. Donnez les formules modélisant cette distribution :

- (a) Chaque passager doit être placé dans un espace. *et dans un seul.*
- (b) Chaque espace peut accueillir au plus 15 passagers.
- (c) L'espace platinum doit accueillir au moins 10 passagers pour être rentable.

On supposera que $P = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble de passagers, $E = \{1, \dots, k\}$ l'ensemble des espaces.

1. Donner l'ensemble des variables propositionnelles qui seront utilisées pour modéliser les contraintes, et expliquer brièvement la signification de ces variables.
2. Donner une formule en **forme conjonctive normale (CNF)** pour modéliser chaque contrainte (a), (b) et (c) ci-dessus.
3. Rajouter les trois contraintes spécifiques suivantes, toujours en **CNF**.
 - (d) Les membres de la famille Dupont (5 membres) ne souhaitent pas se retrouver tous dans le même espace.
 - (e) Mme et M Bertrand souhaitent voyager ensemble (se retrouver dans le même espace).
 - (f) M le premier ministre ne souhaite pas partager son espace avec d'autres voyageurs.