Université Paris Diderot – L3 Informatique 19 Juin 2016

Outils Logiques – Examen de Rattrapage (durée : 3 h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles.
Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.
Rédiger l'exercice 1 dans une feuille indépendante

Exercice 1 (Sémantique - 7 points) Rappel : si $A \in Form$, $\mathcal{V}(A)$ désigne l'ensemble des variables propositionnelles qui apparaissent dans A, par exemple $\mathcal{V}((x_1 \vee (x_2 \wedge x_1))) = \{x_1, x_2\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on considère $Form_n = \{ A \in Form \mid \mathcal{V}(A) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \}$, c'est à dire on considère l'ensemble des formules construites uniquement à partir des variables propositionnelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sans nécessairement les utiliser toutes.

1. Donner une formule $A \in Form_3$ qui ait la table vérité suivante :

x_1	x_2	x_3	A
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2. Est-ce que $A \models (x_1 \vee x_2)$?
3. Donner une formule $B \in Form_3$ telle que $B \neq A$ et $A \models B$.

Si $A \in Form_n$ et si $b = b_1 b_2 ... b_n$ est une séquence de valeurs de vérité de longueur n, on écrira A_b pour abréger $[\![A]\!][x_1 \mapsto b_1, x_2 \mapsto b_2, \ldots, x_n \mapsto b_n]$. Par exemple, pour $n = 2$, on a $(x_1 \vee (x_2 \wedge x_1))_{10} = [\![(x_1 \vee (x_2 \wedge x_1))]\!][x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 0] = 1$.

On dira que deux séquences de valeurs de vérité de même longueur sont **voisines** si on peut passer de l'une à l'autre en changeant exactement un bit. Par exemple les deux séquences de longueur trois 100 et 000 sont voisines, tandis que 100 et 010 ne le sont pas.

Pour $A \in Form_n$, la **frontière** de A, notée $\mathcal{F}(A)$, est l'ensemble des séquences de valeurs de vérité de longueur n ainsi défini :

$$\mathcal{F}(A) = \{b_1 ... b_n \mid \text{ il existe une séquence } b'_1 ... b'_n \text{ voisine de } b_1 ... b_n \text{ telle que } A_{b_1 ... b_n} \neq A_{b'_1 ... b'_n}\}$$

4. Soit $A = (\neg x_1 \vee x_2) \in Form_2$. Calculer $\mathcal{F}(A)$.
5. Soit $A = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \in Form_4$. Calculer $\mathcal{F}(A)$.
6. Donner un élément de $Form_n$ dont la frontière soit vide, c'est à dire donner $A \in Form_n$ telle que $\mathcal{F}(A) = \emptyset$.
7. Donner un élément de $Form_n$ dont la frontière soit l'ensemble de toutes les séquences de valeurs de verité de longueur n, c'est à dire donner $A \in Form_n$ telle que $\mathcal{F}(A) = \{b_1 \ldots b_n \mid b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}\}$.

Exercice 2 (Formes Normales - 7 Points) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les formules contenant uniquement les opérateurs $\{\uparrow, \circ\}$. On considère les règles de transformation suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (X \uparrow Y) & \rightsquigarrow & \neg(X \wedge Y) \\ (\circ X) & \rightsquigarrow & \neg\neg\neg X \\ (\neg\neg X) & \rightsquigarrow & X \end{array}$$

qu'on utilise pour transformer chaque formule de l'ensemble $\mathcal{P}$ dans une formule du calcul propositionnel vu en cours (ne contenant aucune occurrence de $\circ$ et $\uparrow$).

1. Une **séquence de transformations complète** est une séquence de formules de la forme $p_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow p_n$, où
   - $n \geq 1$,
   - $p_i \rightsquigarrow p_{i+1}$ est obtenue par les règles de transformation précédentes,
   - aucune règle ne s'applique à la dernière formule p_n.

   Donner une séquence de transformations complète pour les formules suivantes :

   (a) $(\circ(x \wedge \circ y) \uparrow (x \vee x))$

   (b) $(\neg \circ z) \uparrow (w \uparrow w)$

2. On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les formules construites à partir d'un ensemble de variables V et des opérateurs $\{\neg, \circ, \vee, \wedge, \uparrow\}$. On considère également la fonction Φ sur les formules de l'ensemble $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{lcl} \Phi(x) & := & 0 \\ \Phi(\neg p) & := & \Phi(p) + 1 \\ \Phi(\circ p) & := & \Phi(p) + 4 \\ \Phi(p \vee q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) \\ \Phi(p \wedge q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) \\ \Phi(p \uparrow q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) + 2 \end{array}$$

   (a) Pour chaque séquence de la forme $p_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow p_n$ du point 1, vérifier que $\Phi(p_1) > \ldots > \Phi(p_n)$.

   (b) Montrer par induction sur les formules de $\mathcal{G}$ que : $p \rightsquigarrow q$ implique $\Phi(p) > \Phi(q)$.

   (c) Comment conclure que toute séquence de transformations $\rightsquigarrow$ commençant par une formule quelconque de l'ensemble $\mathcal{G}$ est de longueur finie ?

Exercice 3 (Modélisation - 7 points) Le jour de la fête du cinéma la population de la ville de Chania se voit proposer des billets gratuits pour différentes séances programmées par les 18 cinémas de la ville. On part du postulat selon lequel le système d'impression des billets ne genère pas de doublons (personne, séance et cinéma identiques). Cette initiative de la mairie est soumise par ailleurs aux conditions suivantes :

(a) Aucune personne ne reçoit deux billets incompatibles (i.e. pour une même séance) ;

(b) Les personnes recevant des billets se rendent à un seul et même cinéma ;

(c) Chaque salle de cinéma peut accueillir un maximum de 120 personnes pour une séance.

On supposera que $P = \{p_1, \ldots, p_{50000}\}$ dénote la population de Chania, $S = \{s_1, \ldots, s_5\}$ l'ensemble de séances, $C = \{c_1, \ldots, c_{18}\}$ l'ensemble de salles de cinémas.

1. Donner l'ensemble des variables propositionnelles qui seront utilisées pour modéliser les contraintes, et expliquer brièvement la signification de ces variables.
2. Donner une formule en **forme conjonctive normale (CNF)** pour modéliser chaque contrainte (a), (b) et (c) ci-dessus.
3. Rajouter les deux contraintes spécifiques suivantes, toujours en **CNF**.
   (d) Le cinéma 4 ne donne pas des billets pour deux séances consécutives à une même personne.
   (e) Si la séance d'un cinéma reçoit toutes les personnes $p_1, \cdots, p_{30}$ alors elle ne reçoit pas toutes les personnes $p_{31}, \cdots, p_{60}$.