# Outils Logiques – Examen Final (durée : 3 h)

*Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles.*
*Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.*

**RÉDIGER IMPÉRATIVEMENT L'EXERCICE 1 DANS UNE FEUILLE INDÉPENDANTE.**

**Exercice 1 (DPLL)** Soient $x_1, ..., x_n \in V$ $(n > 0)$ des variables propositionnelles. Une *clause disjonctive complète et ordonnée sur* $x_1, .., x_n$ est une disjonction de litteraux de la forme $(l_1 \vee \ldots \vee l_n)$ où, pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit $l_i = x_i$, soit $l_i = \neg x_i$.

Nous allons écrire *n-cdco* pour abréger "clause disjonctive complète et ordonnée sur $x_1, .., x_n$". Par exemple, $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ est une 3-cdco.

1. Écrire toutes les 2-cdco.
2. Combien y a-t-il de $n$-cdco distinctes ?
3. Montrer que si $d$ et $d'$ sont deux $n$-cdco distinctes, alors $d \not\models d'$, c'est à dire, exhiber une affectation $v$ telle que $[\![d]\!]v = 1$ et $[\![d']\!]v = 0$.

Soit $c_n$ la formule en forme conjonctive normale obtenue par conjonction de toutes les $n$-cdco (l'ordre est inessentiel). Ainsi par exemple, à l'ordre des 2-cdco près, on a :

$$c_2 = ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2))$$

4. Écrire la formule $c_3$ et appliquer à cette formule la fonction `dpll` vue en cours *en suivant les indications ci-dessous.*

   Dessiner l'arbre des appels récursifs de la fonction :
   - les nœuds de l'arbre seront étiquetés par des formes conjonctive normales (les arguments de `dpll`, donc $c_3$ sera l'étiquette de la racine de l'arbre) et les arêtes par les valeurs de vérité des variables de pivot.
   - l'ordre des choix des variables de pivot est imposé : d'abord $x_1$, puis $x_2$ et enfin $x_3$.
   - les feuilles de l'arbre seront soit de formes conjonctive normales contenant la clause disjonctive vide (echec), soit la forme conjonctive normale sans aucune clause disjonctive (succès).
   - le résultat renvoyé par chaque appel de dpll sera écrit à côté du nœud correspondant à l'appel en question (donc par exemple, le résultat de l'appel initiale `dpll(`$c_3$`)` sera écrit à côté de la racine de l'arbre).
5. Soit $d$ une $n$-cdco et soit $c_n^{-d}$ la forme conjonctive normale obtenue en retirant $d$ de $c_n$.
   - Donner $c_2^{-(x_1 \vee x_2)}$.
   - Montrer que $c_n^{-d}$ est satisfaisable pour tout $n$ et tout $d$, c'est à dire, exhiber une affectation $v$ telle que $[\![c_n^{-d}]\!]v = 1$.
6. Montrer que $c_n$ est une contradiction pour tout $n$, c'est à dire que pour toute affectation $v$ on a $[\![c_n]\!]v = 0$.

**Exercice 2 (Modélisation)** Les étudiants de l'Université de Chapadmalal suivent un cursus leur permettant de valider un diplôme selon l'ensemble suivant de contraintes :

(a) Chaque étudiant doit choisir exactement un cours facultatif.

(b) Chaque étudiant doit suivre au moins 5 cours obligatoires.

(c) Un cours obligatoire peut accueillir au plus 20 étudiants.

On supposera que $E = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble d'étudiants, $CO = \{O_1, \ldots, O_k\}$ ($k \geq 5$) l'ensemble de cours obligatoires, et $CF = \{F_1, \ldots, F_h\}$ ($h \geq 1$) l'ensemble de cours facultatifs.

1. Donner l'ensemble des variables propositionnelles qui sera utilisé pour modéliser les contraintes, et expliquer brièvement la signification de ces variables.
2. Donner une formule en **forme conjonctive normale (CNF)** pour modéliser chaque contrainte (a), (b) et (c) ci-dessus.
3. Rajouter les deux contraintes spécifiques suivantes, toujours en **CNF**.

   (d) `Ana` et `Brigitte` veulent suivre *tous* leurs cours ensemble (facultatifs et obligatoires).

   (e) `Carlos` et `Leo` ne veulent pas suivre le même cours facultatif.

**Exercice 3 (Formes Normales)** Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les formules contenant uniquement les opérateurs $\{\texttt{True}, \texttt{False}, \oplus\}$ et soit $z \in V$ une variable propositionnelle donnée. On considère les règles de transformation suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \texttt{True} & \rightsquigarrow & (z \vee \neg z) \\ \texttt{False} & \rightsquigarrow & (z \wedge \neg z) \\ (X \oplus Y) & \rightsquigarrow & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)) \end{array}$$

qu'on utilise pour transformer chaque formule de l'ensemble $\mathcal{F}$ en une formule du calcul propositionnel vu en cours (ne contenant aucune occurrence de `True`, `False` et $\oplus$).

1. Compléter les séquences de transformations suivantes :

| $p_1$ | | $p_2$ | | $p_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\texttt{False} \oplus x)$ | $\rightsquigarrow$ | | $\rightsquigarrow$ | |
| $(x \oplus \texttt{True})$ | $\rightsquigarrow$ | | $\rightsquigarrow$ | |

2. Est-ce que les formules dans la colonne $p_2$ sont dans l'ensemble $\mathcal{F}$ ? Pourquoi ?
3. On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les formules construites à partir d'un ensemble de variables $V$ et des opérateurs $\{\texttt{True}, \texttt{False}, \neg, \vee, \wedge, \oplus\}$. On considère également la fonction $\Phi$ sur les formules de l'ensemble $\mathcal{G}$ :

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \Phi(x) & := & 0 & \Phi(\neg p) & := & \Phi(p) \\ \Phi(\texttt{True}) & := & 1 & \Phi(p \vee q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) \\ \Phi(\texttt{False}) & := & 1 & \Phi(p \wedge q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) \\ & & & \Phi(p \oplus q) & := & 2 \cdot \Phi(p) + 2 \cdot \Phi(q) + 1 \end{array}$$

   (a) Pour chaque séquence de transformations $p_1 \rightsquigarrow p_2 \rightsquigarrow p_3$ du point 1, vérifier que $\Phi(p_1) > \Phi(p_2) > \Phi(p_3)$.

   (b) Montrer par induction sur les formules de $\mathcal{G}$ que : $p \rightsquigarrow q$ implique $\Phi(p) > \Phi(q)$.

   (c) Comment conclure que toute séquence de transformations $\rightsquigarrow$ à partir d'une formule quelconque de l'ensemble $\mathcal{G}$ est de longueur finie ?