Université Paris Diderot – L3 Informatique

28 Juin 2016

Outils Logiques – Examen de Rattrapage (durée : 3 h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles.
Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.
Rédiger l'exercice 2 sur une feuille séparée

Exercice 1 (7 points)

1. Soit $\mathcal{T}\colon Form \to Form$ la fonction qui change tous les $\wedge$ en $\vee$. Par exemple,
$$\mathcal{T}((x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_4)) = ((x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee \neg x_4))$$
Donner une définition récursive de la fonction $\mathcal{T}$.
2. Soit la fonction $\phi\colon Form \to \mathbb{N}$ définie par récurrence :
$$\begin{array}{rcll} \phi(x) & = & 1 & \text{si } x \in V \\ \phi(\neg p) & = & \phi(p) & \\ \phi((p \wedge q)) & = & 2 * (\phi(p) + \phi(q)) & \\ \phi((p \vee q)) & = & \phi(p) + \phi(q) & \end{array}$$
Quelle est la valeur de $\phi(((\neg x \vee y) \wedge \neg z))$?
3. Montrer par induction que $\phi(p) \geq 1$ pour tout $p \in Form$.
4. Montrer par induction que $\phi(\mathcal{T}(p)) \leq \phi(p)$ pour tout $p \in Form$.

Exercice 2 (7 points)

On considère une syntaxe alternative pour le Calcul Propositionnel. Soit V l'ensemble des variables propositionnelles, et soit $Form'$ le plus petit ensemble tel que :

- $V \subseteq Form'$.
- $\mathrm{T}, \mathrm{F} \in Form'$
- si $p, q, r \in Form'$ alors la formule ($\underline{\text{si}}$ p $\underline{\text{alors}}$ q $\underline{\text{sinon}}$ r) appartient à $Form'$.

La constante T désigne la valeur de vérité 1 et la constante F désigne la valeur de vérité 0. La sémantique de la formule ($\underline{\text{si}}$ p $\underline{\text{alors}}$ q $\underline{\text{sinon}}$ r), définie ci-dessous, est conforme à l'intution véhiculée par la syntaxe.

Voici la définition de la sémantique de cette nouvelle formulation de la logique propositionnelle.

Soit v une affectation. On a :

- $[\![x]\!]v = v(x)$ si $x \in V$.
- $[\![\mathrm{F}]\!]v = 0$
- $[\![\mathrm{T}]\!]v = 1$
- $[\![(\underline{\text{si}}\ p\ \underline{\text{alors}}\ q\ \underline{\text{sinon}}\ r)]\!]v = \begin{cases} [\![q]\!]v & \text{si } [\![p]\!]v = 1 \\ [\![r]\!]v & \text{si } [\![p]\!]v = 0 \end{cases}$

Dans les points suivants, x, y, z sont des variables propositionnelles.

1. Donner la table de vérité de la formule
($\underline{\text{si}}$ x $\underline{\text{alors}}$ F $\underline{\text{sinon}}$ y).

2. Montrer que
   ($\underline{\text{si}}$ x $\underline{\text{alors}}$ y $\underline{\text{sinon}}$ z) $\models$ ($\underline{\text{si}}$ x $\underline{\text{alors}}$ y $\underline{\text{sinon}}$ T)
3. Montrer que
   ($\underline{\text{si}}$ x $\underline{\text{alors}}$ y $\underline{\text{sinon}}$ z) $\models\!\!\!\dashv$ ($\underline{\text{si}}$ ($\underline{\text{si}}$ x $\underline{\text{alors}}$ F $\underline{\text{sinon}}$ T) $\underline{\text{alors}}$ z $\underline{\text{sinon}}$ y)
4. Définir un codage du Calcul Propositionnel usuel dans $Form'$, c'est-à-dire donner :
   - Une formule $p_\neg$ de $Form'$ telle que $p_\neg \models\!\!\!\dashv \neg x$
   - Une formule $p_\vee$ de $Form'$ telle que $p_\vee \models\!\!\!\dashv (x \vee y)$
   - Une formule $p_\wedge$ de $Form'$ telle que $p_\wedge \models\!\!\!\dashv (x \wedge y)$

   Conclure (brièvement) que l'ensemble de connecteurs {T, F, ($\underline{\text{si}}$ $\underline{\text{alors}}$ $\underline{\text{sinon}}$)} est fonctionnellement complet.
5. L'ensemble de connecteurs {T, ($\underline{\text{si}}$ $\underline{\text{alors}}$ $\underline{\text{sinon}}$)} est-il fonctionnellement complet ? (la réponse attendue est soit une preuve de complétude fonctionnelle, soit une preuve d'incomplétude fonctionnelle).

Exercice 3 (7 points)

Anaïs, Bruno, Chantal et Dario se trouvent dans un centre de vacances. Le centre offre les activités suivantes : Volley, Samba, Peinture et Natation. Le problème consiste à chercher pour chaque personne un choix d'une ou plusieurs activités, sous les contraintes qui sont énumérées ci-dessous.

On vous demande de modéliser le problème en logique propositionnelle, en utilisant des variables de la forme $[P, A]$ où P est une personne, et A une activité. Une telle variable est vraie si la personne P s'inscrit à l'activité A. Pour chacune des contraintes suivantes donner une formule en forme conjonctive normale qui l'exprime :

1. Chacun doit s'inscrire à au moins une activité.
2. Personne ne peut s'inscrire à toutes les activités.
3. Anaïs et Chantal ne sont pas inscrites à la même activité.
4. Tout inscrit en Peinture doit également s'inscrire en Natation.

Généralisons maintenant le probleme à n personnes et k activités, en écrivant $[i, j]$ lorsque la personne i $(1 \leq i \leq n)$ s'inscrit à l'activité j $(1 \leq j \leq k)$.

1. Chacun doit s'inscrire à au moins 3 activités.
2. Chacun doit s'inscrire à au plus 5 activités.
3. Toute personne inscrite en 3 activités différentes doit également s'inscrire en Natation (l'activité nro 1).