Université Paris Diderot - L3 Informatique

Outils Logiques

Examen Partiel

28 Octobre 2015 - Durée : 2h30

Documents autorisés : notes et transparents du cours et notes manuscrites ; le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (**6 points**) Quatre machines m_0, m_1, m_2, m_3 peuvent être allumées ou eteintes au cours de l'éxécution d'une tâche collective. Pour $i = 0, 1, 2, 3$, soit x_i la variable propositionnelle désignant la proposition *"La machine m_i est allumée"*. Ainsi, par exemple, la formule $(x_0 \wedge \neg x_1)$ exprime le fait que la machine m_0 est allumée et la machine m_1 est eteinte.

1. Donner des formules du calcul propositionnel, construites à l'aide des variables x_0, x_1, x_2, x_3 et de connecteurs $\neg, \wedge, \vee$, exprimant les faits suivants :
   (a) Au moins une machine est allumée.
   (b) Au plus deux machines sont eteintes.
   (c) Pour tout $0 \leq i \leq 3$, si la machine m_i est allumée, alors la machine $m_{(i+1)\ mod\ 4}$ est eteinte.
2. Donner toutes les affectations de support x_0, x_1, x_2, x_3 qui vérifient la conjonction des formules données aux points (a), (b) et (c) ci-dessus.
3. On généralise la situation ci-dessus au cas de n machines $m_0, m_1, ..., m_{n-1}$, pour un entier $n \geq 4$ donné. Donner pour chacune des formules ci-dessous son équivalent en français :

   (a)
   $$\neg(\bigvee_{0 \leq i \leq (n-4)} x_i) \wedge (\bigwedge_{(n-4) < i \leq (n-1)} x_i)$$
   (b)
   $$\bigwedge_{0 \leq i < n-1} (x_i \oplus x_{i+1})$$
   (c)
   $$\bigwedge_{0 \leq i < j < k \leq n} ((x_i \vee x_j) \vee x_k)$$

   où $\bigvee_{1 \leq i \leq n} p_i$ désigne la formule $(...(p_1 \vee p_2) ... \vee p_n)$, $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} p_i$ désigne la formule $(...(p_1 \wedge p_2) ... \wedge p_n)$ et $\oplus$ désigne le connecteur *ou exclusif*.

Exercice 2 (**7 points**)

Pour $p \in Form$, soit $p' \in Form$ la formule obtenue en remplaçant chaque occurrence de variable dans p par la disjonction de la variable elle même et de sa négation. Par exemple, si $p = ((x \wedge y) \vee \neg x)$, on obtient $p' = (((x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg y)) \vee \neg(x \vee \neg x))$.

1. Définir par récurrence une fonction $f : Form \rightarrow Form$ telle que, pour tout $p \in Form$, $f(p) = p'$.
2. Appliquer la fonction que vous venez de définir à la formule $((x \wedge y) \vee \neg x)$, en détaillant toutes les étapes de calcul, et vérifier que le résultat est bien $(((x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg y)) \vee \neg(x \vee \neg x))$.

3. Donner un exemple (aussi simple que possible) de formule $p \in Form$ telle que $f(p)$ est une formule valide.
4. Donner un exemple (aussi simple que possible) de formule $p \in Form$ telle que $f(p)$ est une formule contradictoire.
5. Démontrer par induction que pour toute formule $p \in Form$, la formule $f(p)$ est soit valide soit contradictoire.

Exercice 3 (7 points) On considère le connecteur binaire $\otimes$ dont la table de vérité est

$x \wedge y$	x	x	y	$(x \otimes y)$
0	0	0	0	1
0		0	1	1
0		1	0	0
1		1	1	1

1. Démontrer ou réfuter chacune des trois affirmations suivantes :
   — $(x \wedge y) \models (x \otimes y)$
   — $(x \otimes x) \models\!\!\!\dashv x$
   — $((x \otimes y) \otimes z)) \models\!\!\!\dashv (x \otimes (y \otimes z))$
2. Démontrer que si p est une formule contenant uniquement la variable propositionnelle x et le connecteur $\otimes$, et si v est une affectation telle que $v(x) = 1$, alors $[\![p]\!]v = 1$.
   Conclure que l'ensemble de connecteurs $\{\otimes\}$ n'est pas fonctionnellement complet.
3. Donner une fromule p contenant uniquement les variables propositionelles x et y, et les connecteurs $\otimes$ et $\neg$, telle que $p \models\!\!\!\dashv (x \wedge y)$.
   Conclure que l'ensemble de connecteurs $\{\otimes, \neg\}$ est fonctionnellement complet.