Outils Logiques – Examen Final (durée : 3 h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles, tous les autres documents ne sont pas autorisés. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Rédiger l'exercice 4 dans une feuille indépendante

Exercice 1 (Modélisation) A, B, C, D, E, F, G, H sont les huit jeunes artistes participant cette année à l'exposition d'art contemporain de la ville. Il y a quatre stands bien différenciés, chacun offrant de la place pour deux personnes. Les stands sont disposés en cercle, avec une cour au milieu. Il faut décider qui va exposer dans chaque stand.

1. Modéliser le problème en logique propositionnelle tel que toute distribution des 8 personnes sur le 4 stands correspond à une solution de la formule, et inversement. Donner l'ensemble des variables propositionnelles, et expliquer brièvement la signification de ces variables. On note l'ensemble P des personnes et l'ensemble T des stands comme suit :

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G, H\} \qquad T = \{0, 1, 2, 3\}$$

2. Ajouter à la formule de la question précédente les contraintes suivantes :
 - G et H ont le même style artistique, et veulent exposer ensemble.
 - C et D ne veulent absolument pas exposer dans le même stand.
 - A veut absolument exposer dans le stand numéro 3, le plus proche de l'entrée.
3. On rappelle que les quatre stands sont montés en forme de cercle ; on supposera que le stand 0 est disposé vers le nord, 1 vers l'est, 2 vers le sud et 3 vers l'ouest. Ajouter à la formule de la question précédente les contraintes suivantes :
 - G ne veut pas exposer dans le même stand que B, ni dans un stand voisin à B.
 - H veut exposer dans un stand voisin de celui de D.

Exercice 2 (Gentzen)

1. Donner une dérivation dans le calcul des séquents $\mathcal{G}$ du séquent suivant
 $\vdash ((x \wedge \neg y) \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \wedge y)$.
2. Soit β un nouveau connecteur logique, auquel on associe la table de vérité suivante :

x	y	$x\beta y$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

En utilisant l'équivalence logique $x \beta y \models x \wedge \neg y$ proposez deux nouvelles règles pour le calcul des séquent, une pour introduire le connecteur β dans la partie droite d'un séquent, et une autre pour introduire le connecteur β dans la partie gauche d'un séquent,

3. En utilisant les nouvelles règles du point précédent donner une dérivation dans le calcul des séquents $\mathcal{G}$ du séquent $\vdash ((x \beta y) \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \beta \neg y)$.

Exercice 3 (Algorithme DPLL) Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ de clauses disjonctives suivant :

$$\begin{array}{lll} d_1 = (x \vee \neg y \vee \neg z) & d_2 = (\neg x \vee \neg y \vee z) & d_3 = (x \vee z) \\ d_4 = (y \vee t) & d_5 = (x \vee z \vee u) & d_6 = (\neg x \vee \neg z) \end{array}$$

1. Soit $c = d_1 \wedge d_2 \wedge d_3 \wedge d_4 \wedge d_5 \wedge d_6$. Appliquer l'algorithme DPLL à la CNF c en détaillant toutes les étapes du calcul. Donner l'affectation v de variables qui est construite pendant l'exécution de l'algorithme et vérifier que v satisfait la formule c .
2. Pour $1 \leq i \leq 6$, dire s'il existe $1 \leq j \leq 6$, $j \neq i$, tel que $d_j \models d_i$, et, si c'est le cas, éliminer d_i de l'ensemble $\mathcal{E}$. Donner l'ensemble résultat $\mathcal{E}'$ et la conjonction c' des clauses disjonctives de $\mathcal{E}'$. Donner un (bref) argument justifiant le fait que $c' \models c$.

Exercice 4 (Formes Normales)

1. On considère une nouvelle règle R qui transforme les formules du calcul propositionnel comme suit :

$$(X \vee Y) \rightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y) \quad (\text{R})$$

Rappel : une formule p est en forme R-normale si et seulement si la règle R ne s'applique à aucune sous-formule de p .

- (a) Appliquer la règle R à la formule $p = (\neg(x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y))$ tant que possible, c'est à dire jusqu'à l'obtention d'une forme R-normale.
 - (b) Donner un argument justifiant le fait que l'application itérée de la règle R à une formule du calcul propositionnel termine toujours.
 - (c) Montrer que si l'application de la règle R à une formule p donne comme résultat la formule p' , alors $p \models p'$.
2. On ajoute à présent une deuxième règle :

$$\neg\neg X \rightarrow X \quad (\text{S})$$

On dira qu'une formule p est en forme RS-normale si ni la règle R ni la règle S s'appliquent aux sous-formules de p .

On veut montrer la terminaison de RS, et pour cela, on utilisera la fonction $\phi : FORM \rightarrow \mathbb{N}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{array}{ll} \phi(x) & := 1 \\ \phi(\neg p) & := 1 + \phi(p) \\ \phi((p \wedge q)) & := \phi(p) + \phi(q) \\ \phi((p \vee q)) & := 4 + \phi(p) + \phi(q) \end{array}$$

- (a) Montrer par induction que, pour toute formule p , si p se transforme en p' par une application de la règle R ou de la règle S, alors $\phi(p') < \phi(p)$.
- (b) Conclure que l'application itérée des règles R et S à une formule du calcul propositionnel termine toujours (utiliser sans avoir à la démontrer la propriété suivante : pour toute formule p , $\phi(p) > 0$).