Si système non droit ou gauche :

Ex1) $x = a x b + 1$ elle est <u>stricte</u>

elle admet donc une unique solution $\hat{P}(\perp)$ $\perp = (\phi)$.

On procède par approximation.

approximants : (on substitue à $x$ la solution d'ordre précédent)

ordre 0 : $\emptyset$

ordre 1 : $1 \quad (\varepsilon)$

ordre 2 : $\{ab + 1\}$

ordre 3 : $\{a(ab+1)b+1\} = \{aabb + ab + 1\}$

" 4 : $\{a^3b^3 + a^2b^2 + ab + 1\}$

" n+1 : $\bigcup_{0 \leq i \leq n} a^i b^i$

$L = \{a^n b^n / n \geq 0\}$ $\qquad aLb + 1 = L$

Ex2) $x = a x x + b$ <u>stricte</u>

ordre 0 : $\emptyset$

1 : $\{b\}$

2 : $\{abb + b\}$

3 : $\{a(abb+b)(abb+b) + b\} = \{aabbabb + aabbb + ababb\}$

n+1 : ?

Limite du calcul par approximant !

$(P_1)$ : $|w|_b = |w|_a + 1$

$(P_2)$ : si $w = uv$ avec $v \neq \varepsilon$ $|u|_a \geq |u|_b$

$\mathcal{L}$ langage caractérisé par $(P_1)$ et $(P_2)$

On va montrer que $\mathcal{L} = a\mathcal{L}\mathcal{L} + b$

→ montrons que : $a\mathcal{L}\mathcal{L} + b \subset \mathcal{L}$

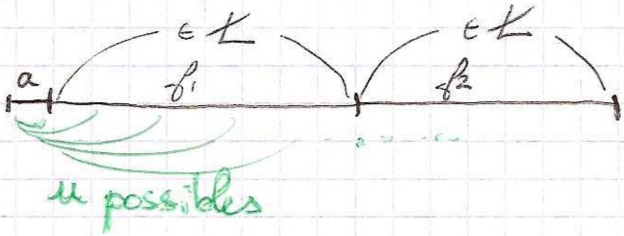
$b \in \mathcal{L}$ vrai

soit $f \in a\mathcal{L}\mathcal{L} \iff f = a f_1 f_2 \; / \; f_1, f_2 \in \mathcal{L}$

$|f|_b = |a f_1 f_2|_b = |f_1 f_2|_b = |f_1|_b + |f_2|_b = |f_1|_a + 1 + |f_2|_a + 1$

$= |a f_1 f_2|_a + 1 = |f|_a + 1$ OK pour $(P_1)$

Soit $f = uv$ avec $v \neq \varepsilon$




$u = \varepsilon$ : $|\varepsilon|_a = 0 \geq |\varepsilon|_b$ ✓

$u = a$ : $|a|_a = 1 \geq |a|_b$.

$u = au'$ $u'$ début strict de $f_1$ $|u'|_a \geq |u'|_b$

$|u|_a = 1 + |u'|_a \geq 1 + |u'|_b > |u|_b$

$u = af_1$ ...

## Grammaires

Soit un alphabet $A$, $V$ variables $A \cap V = \emptyset$

**Def** Une grammaire est un triplet $\langle A, V, P \rangle$

où $P$ : ensemble fini de couples $(\alpha, \beta)$ / $\alpha, \beta \in (A \cup V)^*$

et $|\alpha|_V \geq 1$ (nb de lettres de $V$ dans $\alpha$ non nul)

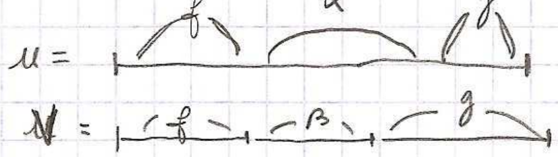
$(\alpha, \beta) \in P$ est une règle : $\alpha$ membre gauche

$\beta$ membre droit

Sur $(A \cup V)^*$ on définit la relation $\xrightarrow[P]{}$ par :

$u \xrightarrow[P]{} v \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists f, g \in (A \cup V)^*$ / $u = f \alpha g$

$\exists (\alpha, \beta) \in P$ et $v = f \beta g$




On énonce "$u$ se dérive directement par $v$ selon $G$"

ou "$v$ dérive directement $u$ selon $G$"

$\xrightarrow[P]{}^{i}$ est la composé de $i$ fois la relation $\xrightarrow[P]{}$

si $u \xrightarrow[P]{}^{i} v$ on dit que $u$ se dérive à l'ordre $i$ en $v$

$\xrightarrow[P]{}^{*}$ fermeture reflexive et transitive de $\xrightarrow[P]{}$

si $u \xrightarrow[P]{}^{*} v$ : $u$ se dérive en $v$ dit-on

Exemple $A = \{a, b\}$ $V = \{x\}$ $P = \{ (x, axbx), (x, 1) \}$

soit le mot $\underbrace{ab}_{f}\underbrace{x}_{\alpha}x\underbrace{bxax}_{g} \xrightarrow[P]{} \underbrace{ab}_{f}\underbrace{x}_{\alpha}\overbrace{axbxbxax}^{\beta\ \ g}_{g} \xrightarrow[P]{} aba\,xb\,x\,bxax$

$\ldots \longrightarrow abaabbba \in A^*$

plusieurs choix pour $(\alpha, \beta)$ donc plusieurs derivations possibles

Def On appelle langage engendré par $G$ en partant de $u \in (A \cup V)^*$ l'ensemble

$L_G(u) = \{ v \in A^* / u \longrightarrow^{*} v \}$

$\hat{L}_G(u) = \{ v \in (A \cup V)^* / u \longrightarrow^{*} v \}$ langage elargi engendré par $G$ en partant de $u \in (A \cup V)^*$

Rmq $L_G(u) = \hat{L}_G(u) \cap A^*$

$\hat{L}_G(u) \neq \emptyset$ car $u \in \hat{L}_G(u)$

$L_G(u)$ peut être vide.

# Grammaires algébriques

$G = \langle A, V, P \rangle$ est algébrique ssi $\forall (\alpha, \beta) \in P$
$\alpha$ se réduit à 1 lettre de $V$.

Si $G$ algébrique, on définit $\forall$ lettre $v_i$ de $V$
la partie $P_i = \{ \beta \mid (v_i, \beta) \in P \}$

et on considère le système d'équations :

$$(v_i = P_i)_{i=1 \dots \mathrm{card}(V)}$$

Exemple $A = \{a, b\}$ $V = \{v_1, v_2\}$

$$P = \{ (v_1, a v_1 b), (v_2, v_1 v_2), (v_1, 1), (V_2, ab v_1) \}$$

$$\left| \begin{array}{l} v_1 \to P_1 = \{ a v_1 b, 1 \} \\ v_2 \to P_2 = \{ v_1 v_2, ab v_1 \} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a v_1 b + 1 \\ v_2 = v_1 v_2 + ab v_1 \end{array} \right.$$

Prop Si $\mathrm{card}(V) = n$ avec $V = \{v_1, \dots v_n\}$ le n-uple $(L_G(v_1), \dots L_G(v_n))$ est solution du système d'équations $(v_i = P_i)_{i=1,\dots,n}$

. Notation

si $(\alpha, \beta) \in P$ : $\alpha \xrightarrow[P]{} \beta$ $(f = g = 1)$

si deux règles on le $\hat{m}$ membre gauche $v$, au lieu de $\begin{array}{l} v \to m \\ v \to m' \end{array}$ on écrit $v \to m + m'$.

# Lemme fondamentale

Soit $G = \langle A, V, P \rangle$ algébrique.

si $fg \xrightarrow{n} w$ alors $\exists\, m_1, m_2 \in (A \cup V)^*$
$\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

tq

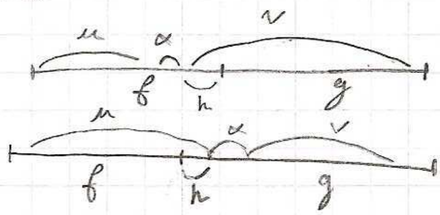
$$f \xrightarrow{n_1} m_1 \qquad w = m_1 . m_2$$
$$g \xrightarrow{n_2} m_2 \qquad \text{et } n = n_1 + n_2$$

Dem| $n = 0$ trivial

$n = 1$


$|\alpha| = 1$ car grammaire algébrique

- premier cas : $|f| \geq |u\alpha|$ ($\alpha$ dans $f$)
- deuxième cas : $|f| < |u\alpha|$ ($\alpha$ dans $g$)




- 1) $\Rightarrow$ $f = u\alpha h$
  $v = hg$

$$w = u\beta v = \underbrace{u\beta h}_{m_1}\underbrace{g}_{m_2}$$

$$f \xrightarrow{1} m_1 \qquad w = m_1 m_2$$
$$g \xrightarrow{0} g = m_2 \qquad n = 1 + 0 \qquad \checkmark \text{ok}$$

2) Idem.

HR : Lemme vrai $\forall n \leq k$, montrons le pour $k+1$

on suppose $fg \xrightarrow{k+1} w$

$$fg \longrightarrow h \xrightarrow{k} w$$

$h = h_1 h_2$ avec $f \xrightarrow{i_1} h_1$, $g \xrightarrow{i_2} h_2$ $\qquad i_1 + i_2 = 1$, $h = h_1 h_2$

$$h_1 h_2 \xrightarrow{k} w$$

Applique HR

$$h_1 \xrightarrow{n_1} m_1 \qquad n_1 + n_2 = k$$
$$h_2 \xrightarrow{n_2} m_2 \qquad m_1 m_2 = w$$

donc $f \xrightarrow{m_1 + i_1} m_1$

$g \xrightarrow{m_2 + i_2} m_2 \qquad m_1 + i_1 + m_2 + i_2 = 1 + k$

Exemple d'utilisation

$G\langle A, V, P\rangle \quad A = \{a, b\} \quad V = \{v\} \quad P : v \to avb + 1$

montrons que $L_G(v) \subset \{a^n b^n / n \geq 0\} = L$

$m \in L_G(v) \iff v \xrightarrow{*} m \in A^*$

$\iff \exists n \in \mathbb{N}$ tq $v \xrightarrow{n} m \in A^*$

On fait reccurence sur $n$.

<u>$n=0$</u> $\quad v \xrightarrow{0} v$ or $v \notin A^*$

<u>$n=1$</u> $\quad v \xrightarrow{1} avb \notin A^*$

$\xrightarrow{1} 1 \in A^*$ je verifie que $1 \in L$ (oui $n=0$ ✓)

HR: $\forall i \leq n \quad v \xrightarrow{i} m \in A^* \Rightarrow m \in L$

Soit $m \in A^*$ tq $v \xrightarrow{n+1} m$

$v \xrightarrow{1} 1$ c'est fini

donc $v \xrightarrow{1} avb \xrightarrow{n} m$

$m = m_1 m_2$

$av \xrightarrow{n_1} m_1 \qquad n_1 = n$

$b \xrightarrow{n_2} m_2 \qquad n_2 = 0 \quad m_2 = b$

$avb \xrightarrow{n} m = am'b$ avec $v \xrightarrow{n} m' \in L$

ok ✓

donc $am'b \in L$

Variantes

① Soit $G = \langle A, V, P\rangle$ gram. algébrique

si $f_1 f_2 .. f_k \xrightarrow{n} w$ alors $w = m_1 m_2 .. m_k$

avec $f_i \xrightarrow{n_i} m_i$

tq $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

② si $u_0 v_{i_1} u_1 v_{i_2} \dots v_{i_k} u_k \xrightarrow{n} w$

avec $u_i \in A^*$
$v_i \in V$

Alors $w = u_0 m_1 u_1 m_2 \dots m_k u_k$
avec $v_{i_j} \xrightarrow{n_j} m_j$ et $\sum n_j = n$

## ~~Def~~ Derivation Gauche

Une suite de mots $u_0 u_1 \dots u_n$ tq $u_{i+1}$ dérive direct. de $u_i$ ($u_0 \to u_1 \to \dots$) constitue une dérivation gauche si le mot qui précède chaque non-terminal derivé à chaque étape a une longueur qui croit ↗ (au sens large)

Exemple) $G < \{a, b\}, \{v\}, P \}$
$P = \{ v \to avbv + 1 \}$

soit le mot $\underbrace{abv}_{f_0}\underbrace{bv}_{\alpha}\underbrace{va}_{g_0} \longrightarrow \overbrace{\underbrace{abvb}_{f_0}\, avbv}^{f_1}\ \overbrace{\underbrace{va}_{g_0}}^{g_1}$

$\longrightarrow \dots$

## ~~Def~~ Ambiguïté

Une gram. algebrique $G = \langle A, V, P \rangle$ est dite ambiguë si $\exists$ mot $f \in (A \cup V)^*$, $\exists v \in V$ tq $f$ admet au moins 2 dérivations gauches distinctes partant de $v$

$$\left.\begin{aligned} v &= f_1, f_2, \dots f_n = f \\ v &= g_1, g_2, \dots g_p = f \end{aligned}\right\} \text{ derivations gauches distinctes}$$

Elle est dite non ambiguë sinon.

Exemple)

$G = \langle \{a, b\}, \{x\}, \{x \to xx + axb + 1\} \rangle$
$x \to \underline{x}x \to a\underline{x}bx \to ab\underline{x} \to ab$ : G ambiguë
$\|$
$x \to axb \to ab$

$G = \langle \{a,b\}, \{x\}, \{x \to axx + b\} \rangle$

On veut montrer que $G$ non-ambiguë.

__Absurde__ Supposons $G$ ambiguë

donc $\exists$ $\left.\begin{array}{l} x \to f_1 \to f_2 \to \dots \to f_n = f \\ x \to g_1 \to g_2 \to \dots \to g_p = f \end{array}\right)$ dérivations gauches distinctes.

On prend la première différence rencontrée

$$\begin{array}{ccc} f_i & \longrightarrow & f_{i+1} \\ \parallel & & \neq \\ g_i & \longrightarrow & g_{i+1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} f_i = u\,x\,v \longrightarrow u\,m\,v = f_{i+1} \\ \parallel \\ g_i = u\,x\,v \longrightarrow u\,m'\,v = g_{i+1} \end{array}$$

$m \neq m'$ $\quad f_{i+1} = u\,axx\,v \xrightarrow{*} f$

$\quad g_{i+1} = u\,b\,v \xrightarrow{*} f$

comme dérivations gauches on ne touchera plus à __$ua$__ ni __$ub$__

or c'est impossible que $f$ commence par $ua$ et $ub$

__Contradiction__.

**~~Def~~** Un langage algébrique est dit non-ambiguë si $\exists$ une grammaire algébrique non-ambiguë qui l'engendre.

Il est ambiguë sinon.

__Ex__ | mq $G = \langle \{a,b\}, \{x\}, \{x \to xx + axb + 1\} \rangle$

$G' = \langle \{a,b\}, \{x\}, \{x \to axbx + 1\} \rangle$

$L_G(x)$ non ambiguë

1) $G'$ non ambiguë

2) $L_G(x) = L_{G'}(x)$ $\quad$ 2a) $L_G(x) \subset L_{G'}(x)$

$L_{G'}(x) \subset L_G(x)$