

donnée 1 matrice $M = \Phi(R)$ de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{B})$

7/

$N \leftarrow$ élément neutre de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{B})$ // $N = \Phi(I_E)$

$T \leftarrow$ somme(N, M) // $T = \Phi(I_E \cup R)$

Tant que $T \neq N$

do

$N \leftarrow T$

$T \leftarrow$ somme(N , produit(T, M))

done

end tant que

$\rightarrow T$

a) Si le prog. termine, il calcule $\Phi(R^*)$

Au i^{ème} tour $T = \Phi(\bigcup_{0 \leq i \leq n} R^i)$ // dem par récurrence

b) Termine-t-il tjrs ?

$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{B})$ est fini donc il n'existe pas de chaîne infinie strict $\nearrow$ dans $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{B})$ pour l'ordre :

$$\Phi(R) \leq \Phi(S) \iff R \subseteq S$$

or la suite des approximations $\Phi(I_E), \Phi(I_E \cup R), \dots, \Phi(\bigcup_{0 \leq i \leq n} R^i)$ est croissante, donc elle devient stationnaire.

c) Calcul de complexité pire.

chercher la plus grande suite strict $\nearrow$ possible.

un 1 ne peut redevenir un 0. donc au pire on part de la matrice nulle : $O(n^2)$. produit matrice $O(n^3)$ Total : $O(n^5)$

Lemme de König

soit R relation sur E fini de dimension n

si $(i, j) \in R^*$ alors $(i, j) \in \bigcup_{0 \leq l \leq n} R^l$

l'approximant d'ordre n suffit.

Don Absurde $\exists (i,j) \in R^* \setminus \bigcup_{0 \leq l \leq n} R^l$

$\exists (i,j) \exists k$ tq $(i,j) \in R^k$ avec $k > n$.

On choisit (i,j) de telle sorte que k soit minimum

$(i,j) \in R^k \iff \exists x_1=i, x_2, x_3, \dots, x_k=j$ tels que $(x_r, x_{r+1}) \in R$

Cette liste contient k elts dans E , or $\dim(E) = n < k$
donc il y a 2 éléments identiques dans la liste.

$$i = x_1, x_2, \dots, x_a, \cancel{x_b}, \dots, x_k = j$$

$$\lfloor = \rfloor$$

On obtient une ss-suite $i = x_1, x_2, \dots, x_k = j$

$(i,j) \in R^s$ avec $s < k$ Contradiction

König $\Rightarrow$ on fait au plus n fois la boucle
donc en réalité, si le produit de matrice est
fait en n^3 opérations et la somme en n^2
on major par $O(n^4)$

On peut encore optimiser sachant que

$$\left(\bigcup_{0 \leq i \leq n} R^i \right) \circ \left(\bigcup_{0 \leq i \leq n} R^i \right) = \bigcup_{0 \leq i \leq 2n} R^i$$

Dans boucle : $T \leftarrow \text{produit}(T, T)$

$\log n$ passage.

Total : $O((\log n) n^3)$

2^{ème} méthode

$R \subset E \times E$

* partie $F \subset E$ on note $W_j^F = \left\{ \begin{array}{l} \text{suites } (x_0, x_1, \dots, x_s) \text{ tq} \\ x_0 = i, x_s = j \text{ et} \\ (x_r, x_{r+1}) \in R \text{ et} \\ x_1, \dots, x_{s-1} \in F \end{array} \right\}$

${}^i W_j^E = \{ \text{suites de } R^* \} \leftarrow \text{résultat recherche.}$

${}^i W_j^\emptyset = \{ (i, j) \in R \} \leftarrow \text{donnée : } R$

• $F \neq \emptyset$ soit $k \in F$

$${}^i W_j^F = {}^i W_j^{F \setminus \{k\}} \cup {}^i W_k^{F \setminus \{k\}} \cdot {}^k W_j^{F \setminus \{k\}}$$

$$M^{(1)} \leftarrow {}^i W_j^{(1)} = {}^i W_j^\emptyset \cup {}^i W_1^\emptyset \cdot {}^1 W_j^\emptyset$$

$$M^{(1)}(i, j) = M^{(10)}(i, j) \oplus M^{(10)}(i, 1) \otimes M^{(10)}(1, j)$$

$$M^{(k+1)}(i, j) = M^{(k)}(i, j) \oplus M^{(k)}(i, k+1) \otimes M^{(k)}(k+1, j)$$

$M^{(n)}$ est la matrice de R^*

méthode en $O(n^3)$ opérations.

Def

Une relation sur E étiquetée sur un demi-anneau A est une relation R sur E munie d'une fonction λ de $E \times E \mapsto A$ de domaine R .

$(x, y) \in R \quad \lambda(x, y) = a \in A$ étiquette de l'arc (x, y) .

• On prolonge λ en une application de $E \times E \mapsto A$ en posant $\lambda(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin R$
 $\uparrow$ zéro du demi-anneau (neutre).

• Si R est étiquetée dans A , on associe à R la matrice $M_{n \times n} \langle A \rangle$ où $M(i, j) = \lambda(i, j)$

• $\lambda : E \times E \mapsto A$, on l'étend à $(E \times E)^n$ dans A comme 1 morphisme
 $\lambda : (i, j) = a, \lambda(j, k) = b \rightarrow \lambda(i, k) = a \cdot b$

On peut calculer la matrice associée à $R \circ R$ donc R^*

$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \in A \end{bmatrix}$$

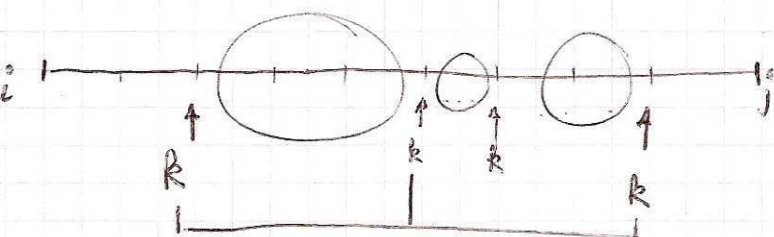
$R \qquad R$

$$R^* = \bigcup_{0 \leq n} R^n \quad \text{Comment calculer } R^*?$$

On peut appliquer la 2^e méthode vue précédemment.

↳ Donc on supprime successivement elt de E .

$$k \in F \quad {}_i W_j^F = {}_i W_j^{F \setminus \{k\}} \cup {}_i W_k^{F \setminus \{k\}} \cdot \left({}_k W_k^{F \setminus \{k\}} \right)^* \cdot {}_k W_j^{F \setminus \{k\}}$$



Soit un alphabet A et $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}(A^*) \times \mathcal{P}(A^*) \times \dots \times \mathcal{P}(A^*)$$

$$L \in \mathcal{E} \quad L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$$

$\forall i \quad L_i \in A^*$

$\mathcal{E}$ muni de l'ordre $\subseteq$ composante à composante

$$L \subseteq M \iff \forall i \quad (L_i \subseteq M_i)$$

$\mathcal{E}$ est un ordonné complet

$$\bullet \exists \text{ 1 + petit elt } \perp = (\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)$$

• $\forall$ chaîne croissante admet une borne sup qui est l'union de chaque composante.

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ensemble de n variables. On considère X comme un alphabet (disjoint de A)

Pour tout élément L de $\mathcal{E}$ on définit la substitution χ_L de $\mathcal{P}((A \cup X)^*)$ à $\mathcal{P}((A \cup X)^*)$ par :

$$\begin{cases} \forall a \in A & \lambda_L(a) = a \\ \forall x_i \in X & \lambda_L(x_i) = L_i \end{cases}$$

$$\lambda_L(1) = 1 \quad \lambda_L(l.g) = \lambda_L(l) \cdot \lambda_L(g)$$

$$\lambda_L(\emptyset) = \emptyset \quad \lambda_L(P \cup Q) = \lambda_L(P) \cup \lambda_L(Q)$$

On étend λ_L à des n -uplets :

$$\lambda_L(P_1, P_2, \dots, P_n) = (\lambda_L(P_1), \lambda_L(P_2), \dots, \lambda_L(P_n))$$

Si P est un n -uplet de $\mathcal{P}((A \cup X)^*)$

On pose $\lambda_L(P) = \hat{P}(L)$ si $L \in \Sigma$ alors $\hat{P}(L) \in \Sigma$

donc $\hat{P}$ est une application $\Sigma \mapsto \Sigma$

$$\text{si } L \subset M \quad \lambda_L(P) = (\lambda_L(P_1), \dots, \lambda_L(P_n)) \subset \lambda_M(P)$$

$\Rightarrow \hat{P}$ croissante

la borne sup de toute chaîne $\uparrow$ de Σ est $\cup$ composée à coup sûr
donc évident $\rightarrow \hat{P}$ continue.

$\hat{P} \uparrow$ et continue $\Rightarrow \hat{P}$ admet un plus petit point fixe
qui vaut $\bigcup_{0 \leq i} \hat{P}^i(\perp)$

Def

Un système de n équations algébriques sur $\mathcal{P}(A^*)$ est la donnée d'un n -uplet de polynômes de $(A \cup X)^*$ où $X = \{x_1, \dots, x_n\} / A \cap X = \emptyset$

Soit P un tel n -uplet $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$

on écrit $\forall i \quad x_i = P_i$

Def

On appelle solution d'un système d'équations algébrique

$P = (P_1, \dots, P_n)$ un n -uplet L de Σ t.q. $\mathcal{P}(L) = L$

Exemple

$$\text{Soit } A = \{a, b\} \quad X = \{x_1, x_2\}$$

$$(*) \begin{cases} x_1 = P_1 = \{ax_2\} \cup \{bx_1\} \cup \{\varepsilon\} \\ x_2 = P_2 = \{ax_1\} \cup \{bx_2\} \end{cases}$$

$$(L_1, L_2) \begin{cases} L_1 = aL_2 \cup bL_1 \cup \{\varepsilon\} \\ L_2 = aL_1 \cup bL_2 \end{cases}$$

$$M_1 = \{f \in A^* / |f|_a = 2p, p \in \mathbb{N}\}$$

$$M_2 = \overline{M_1} = \{f \in A^* / |f|_a = 2p+1, p \in \mathbb{N}\}$$

$$\forall v \in M_2 \quad a.v \in M_1 \quad \forall u \in M_1 \quad a.u \in M_2 \quad \varepsilon \in M_1$$

$$b.M_1 \subset M_1 \quad b.M_2 \subset M_2$$

$$\begin{cases} \{\varepsilon\} \cup a.M_2 \cup b.M_1 = M_1 \\ a.M_1 \cup b.M_2 = M_2 \end{cases}$$

Donc (M_1, M_2) est une solution du système $(*)$,
(unique)

Def Un système d'équations algébrique P est :

strict si $\forall i \quad P_i \subset (AUX)^* A (AUX)^* \cup \{\varepsilon\}$

$$\iff m \in P_i \iff m = \varepsilon \text{ ou } m = u.a.v \text{ avec } u,v \in (AUX)^*, a \in A$$

Propre si $\forall i \quad P_i \subset A^+ \cup (AUX)^+ \cdot (AUX)^+$

$$\iff m \in P_i \iff m \neq \varepsilon \quad m \neq x \text{ pour } x \in X$$

Prop Un système algébrique :

- strict admet 1 unique solution

- propre admet 1 unique solution propre car constituée de langage qui ne contiennent pas ε .

$\odot$ est strict.

exemple Soit l'équation $x = x \cdot x$ ce système est propre non strict.

$$A = \{a, b\}$$

$$a^* = a^* \cdot a^* : \text{solution}$$

$$b^* = b^* \cdot b^* : \text{solution}$$

$$A^* = A^* \cdot A^* : \text{solution}$$

} de contenu ε !

Ces solutions ne sont pas propres.

L'unique solution propre est : $\emptyset = \emptyset \cdot \emptyset$.

$\emptyset$ ne contient pas ε .

Def Un système d'équations P est linéaire si :

$$\forall i \quad P_i \subset A^* \times A^* \cup A^*$$

$\Leftrightarrow m \in P_i \Rightarrow m$ à au plus une variable.

Def Un système d'équations P est linéaire droit si :

$$\forall i \quad P_i \subset A^* \times A^*$$

m.m. pour linéaire gauche :

$$\forall i \quad P_i \subset x \cdot A^* \cup A^*$$

Lemme d'Arden

• la plus petite solution de l'équation linéaire droite $x = Ax \cup B$ est : $A^* \cdot B$

• " " " linéaire gauche $x = xA \cup B$ est : $B \cdot A^*$

Dém) 1) Soit $x = A^* \cup B$

$$A.A^*B \cup B = (A.A^* \cup \{\epsilon\}).B = A^*B$$

$\rightarrow A^*B$ est solution.

2) m.g A^*B est la + petite solution.

Soit M une solution, alors $M = AM \cup B$

$$\rightarrow B \subset M \text{ et } AM \subset M \rightarrow AB \subset M$$

$$\rightarrow AAB \subset AM \subset M \rightarrow \forall i, A^i B \subset M$$

$$\text{donc } \left(\bigcup_{0 \leq i} A^i B \right) \subset M$$

$$\left(\bigcup_{0 \leq i} A^i \right).B = A^*B \subset M \text{ donc } A^*M \text{ + petite sol}$$

/ * notation on remplace $\cup$ par $+$
 ϵ par 1 */

$$\textcircled{*} \text{ devient : } \begin{cases} x_1 = p_1 = ax_2 + bx_1 + 1 \\ x_2 = p_2 = ax_1 + bx_2 \end{cases}$$

On fixe x_2 .

$x_1 = bx_1 + (ax_2 + 1)$ selon Arden, l'unique solution est $x_1 = b^*. (ax_2 + 1)$ cette solution dépend en réalité de x_2 ! on substitue dans la 2^e équation x_1 .

$$x_2 = a.b^*. (ax_2 + 1) + b.x_2 = ab^*a.x_2 + ab^* + b.x_2 \\ = (ab^*a + b)x_2 + ab^*$$

$$\text{selon Arden : } x_2 = (ab^*a + b)^*. ab^*$$

$$\text{donc } x_1 = b^*. (a(ab^*a + b)^*. ab^* + 1)$$

L'unique est plus petite sol est (x_1, x_2) trouvés ainsi

soit le couple de langage $(b^*(a(ab^*a + b)^*.ab^* + 1), (ab^*a + b)^*.ab^*)$