

est une partie égale à E .

5/

Corollaire

Soit $\leq$ un ordre bien fondé sur E
pour prouver qu'une propriété $P(x)$ est vraie
 $\forall x \in E$ il suffit de prouver que :

- Les elts x de E qui sont déterminés, on prouve $P(x)$

- Les Elts qui ne sont pas minimaux
 $[y < x \Rightarrow P(y)] \Rightarrow P(x)$
 PCE

$P = \{x \mid P(x) \text{ est vraie}\}$

$$\text{IN } f(n) = \begin{cases} n-10 & \text{si } n > 100 \\ f(f(n+1)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit R la relation d'ordre suivante

$$\forall x, y \in \text{IN} \quad x \leq_R y \iff (y \leq 100 \text{ et } x \geq y)$$

ou $(x=y)$

C'est bien une relation d'ordre bien fondé

$$\begin{matrix} x \leq_R y \\ y \leq_R z \end{matrix} \implies x \leq_R z$$

A prouver $\forall n \quad P(n) = f(n) \geq 91$

(a) n minimal $\iff n \geq 101$

$$f(n) = n-10 \geq 101-10 = 91$$

donc $P(n)$ vraie $\forall$ les minimaux

(b) n non minimal $\iff n \leq 100$

$$f(n) = f(f(n+1))$$

$$\text{soit } m = f(n+1) \quad f(n) = f(m)$$

Def

Un ens E muni d'une relation d'ordre $\leq$ est un ordonné complet si :

- $\exists$ un + petit elt dans E (un minimum)
- $\nexists$ chaîne $\uparrow$ admet une borne sup.

On considère des applications d'un ens E ordonné complet pour $\leq_E$ dans F ordonné complet pour $\leq_F$

- σ est $\uparrow$ si $x \leq_E y \Rightarrow \sigma(x) \leq_F \sigma(y)$
- σ est strict $\uparrow$ si $\sigma(\perp_E) = \perp_F$
- σ est continue si $\sigma(\bigvee_{i=0 \dots} \{x_i\}) = \bigvee_{i=0 \dots} \{\sigma(x_i)\}$

Théorème Knaster-Tarski

Soit $\langle E, \leq, \perp \rangle$ un ordonné complet, $\perp = \text{minimum}$
Tout app. $\sigma : E \rightarrow E$ qui est $\uparrow$ et continue admet un plus petit point fixe qui vaut $\bigvee_{i=0 \dots} \{\sigma^i(\perp)\}$

$\forall n \quad H_n = \bigvee_{0 \leq i \leq n} \sigma^i(\perp)$ approximation d'ordre n du point fixe.

$$\begin{aligned} \perp \leq \sigma(H_n) &= \sigma\left(\bigvee_{0 \leq i \leq n} \sigma^i(\perp)\right) = \bigvee_{0 \leq i \leq n} \sigma \cdot \sigma^i(\perp) = \bigvee_{0 \leq i \leq n+1} \sigma^i(\perp) \\ &\Downarrow \\ V(\perp, \sigma(H_n)) &= \sigma(H_n) \\ &= \bigvee_{0 \leq i \leq n+1} \sigma^i(\perp) \\ &= H_{n+1} \end{aligned}$$

$$H_{n+1} = \sigma(H_n) \quad \text{et} \quad H_0 = \perp$$

La suite $H_0, H_1, \dots, H_n, \dots$ est une chaîne $\uparrow$, sa borne sup est le + petit point fixe.

Exemple

$\mathcal{E}$ est l'ensemble des app σ de $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ dans lui-même ordonné par l'ordre induit par l'ordre plat. qui vérifient $\sigma(\perp) = \perp$.

$\exists$ un plus petit élément qui est l'application Ω tq $\forall x \in \mathbb{N} \cup \{\perp\} \quad \Omega(x) = \perp$

$\mathcal{E}$ est un ordonné complet.

$\sigma = \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ définie par : soit $f \in \mathcal{E}$

$$\sigma(f) = g \quad \text{tq} \quad \begin{cases} g(\perp) = \perp \\ g(0) = 1 \\ g(n+1) = \begin{cases} \perp & \text{si } f(n) = \perp \\ (n+1)f(n) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie que σ est $\uparrow$ et continue

$\Rightarrow \sigma$ admet un plus petit pt fixe que l'on va calculer par approximations successives.

	$H_0 = \Omega$	$H_1 = \sigma(H_0)$	$H_2 = \sigma(H_1)$	$H_3 = \sigma(H_2)$	$H_4 = \sigma(H_3)$	
1	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	...
0	$\perp$	1	1	1	1	
1	$\perp$	$\perp$	1	1	1	
2	$\perp$	$\perp$	$\perp$	2	2	
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	6	
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	
5	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

détail : $H_2(1) = \sigma(H_1)(1) = (n+1) \cdot H_1(0) = 1 \cdot 1 = 1$
 $\begin{matrix} \nearrow \\ n=0 \quad n+1 \end{matrix}$
 $H_1(0) = 1$

$$H_{n+1} = \sigma(H_n) : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow n!$$

Exemple Rapport entre Pt fixe et relations.

Soit E un ensemble et $\mathcal{T}_F(E) = \{A \mid F \subseteq A \subseteq E\}$
 $F \subseteq E$

$\mathcal{T}_F(E)$ ordonné par l'inclusion.

ordonné complet : . car $\exists$ plus petit elt : plus petite partie
de E qui contient $F = F$.
. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \cup A_i$

Soit R une relation sur E , on lui associe l'application

$$\tilde{R} : \mathcal{T}(E) \rightarrow \mathcal{T}(E)$$

$$\tilde{R}(A) = A \cup \{y \mid \exists x \in A, (x, y) \in R\}$$

On vérifie que $\tilde{R} \uparrow$ et continue.

$$\tilde{R} \uparrow : A \subseteq B \Rightarrow \tilde{R}(A) \subseteq \tilde{R}(B)$$

$$\tilde{R} \text{ continue : } \tilde{R}(\cup A_i) = \cup \tilde{R}(A_i)$$

Donc selon th. de KT, $\exists$ un plus petit point fixe
à $\tilde{R}$. Calculons ses premiers approximations.

$$H_0 = \text{plus petit élément} = F.$$

$$H_1 = \tilde{R}(H_0) = \tilde{R}(F) = F \cup \{y \mid \exists x \in F, (x, y) \in R\}$$

$$H_2 = F \cup \{y \mid \exists x \in F (x, y) \in R\} \cup \{z \mid \exists y \in (\tilde{R}(F)), \exists x \in F (x, y) \in R \text{ et } (y, z) \in R\}$$
$$= F \cup \{y \mid \exists x \in F (x, y) \in R^0 \cup R \cup R^2\}$$

$$H_n = \{y \mid \exists x \in F \dots (x, y) \in R^0 \cup R \cup \dots \cup R^n\}$$

Le plus petit point fixe est donc $\{y \mid \exists x \in F (x, y) \in \underbrace{\cup_{0 \leq n} R^n}_{R^*}\}$

$\forall x \in E$ on peut prendre $F = \{x\}$ le pt fixe
est alors $R^*(x) = \{y \mid (x, y) \in R^*\}$

6/

Donc si on sait calculer R^* on sait calculer le plus petit point fixe de $\hat{R}$ part toute partie de F .

Inversement

si $\sigma: E \rightarrow E$ satisfaisant les hypothèses de KT, $R = \{(x, \sigma(x)) \mid x \in E\}$

Alors $\tilde{R} = \sigma$

Par conséquent calculer R^* c'est calculer le plus petit point fixe de σ .

Def

Moore

Une propriété P des relations sur un ens E est de Moore ssi :

- 1) la relation totale $E \times E$ satisfait P
- 2) l'intersection de relations qui satisfont P est une relation qui satisfait P .

Exemple

1) "être réflexive"
totale ok.

$$R \text{ réflexive} \iff I_E \subset R$$

2) "être symétrique"
totale ok.

$$R \text{ sym} \iff R \subset R^{-1}$$

$$R \subset R^{-1}$$

$$R \cap S \subset (R \cap S)^{-1} ?$$

$$\text{oui } (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

3) "être réflexive et symétrique" (à faire) totale ok.

4) "être transitive"
totale ok.

$$R \text{ transitive} \iff R \circ R \subset R$$

Def P-fermeture
 Si P prop de Moore, l'ensemble des relations qui contiennent une relation donnée et qui vérifient P admet un plus petit élément qui est l'intersection de toutes les relations de l'ensemble

On appelle ce plus petit élément la P -fermeture (cloture) de la relation donnée.

Calculons le pr les exemples précédents.

1) $P = \text{"être réflexive"}$

Soit S la P -fermeture d'une relation R

hypothèse $\begin{cases} R \subset S \\ I_E \subset S \end{cases} \quad \begin{matrix} S \subset R \cup I_E \\ R \cup I_E \subset S \end{matrix}$

donc $S = R \cup I_E$

2) $P = \text{"être sym"}$

Soit S la P -fermeture de R .

hypothèse $\begin{cases} R \subset S \\ S \subset S^{-1} \end{cases} \rightarrow S^{-1} \subset S$

$\Rightarrow R^{-1} \subset (S^{-1})^{-1} = S$ donc $R \cup R^{-1} \subset S$

par ailleurs $R \cup R^{-1}$ est une relation symétrique qui contient R
 or S plus petite rel. sym qui contient R alors

$S \subset R \cup R^{-1}$ donc $S = R \cup R^{-1}$

3) $P = \text{"être transitive"}$

Soit S la P -fermeture de R

P propriété de Moore donc $\exists S$ étant P -fermeture de R

hypothèse $\begin{cases} R \subset S \\ S \circ S \subset S \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} R \circ R \subset S \circ S & R^2 \subset S \\ R \circ R^2 \subset S \circ S & R^3 \subset S \\ \vdots & \vdots \\ R^n \subset S \end{matrix}$

$\forall n > 0 \quad R^n \subset S$

$$\underbrace{\bigcup_{0 \leq n} R^n}_{= R^+} \subset S$$

$$\begin{aligned} R^+ \circ R^+ &= \left(\bigcup_{0 \leq n} R^n \right) \circ \left(\bigcup_{0 \leq m} R^m \right) = \bigcup_{n, m \geq 0} R^n \circ R^m \\ &= \bigcup_{i = n+m \geq 1} R^i \subset R^+ \quad \Rightarrow R^+ \circ R^+ \subset R^+ \end{aligned}$$

$\Rightarrow R^+$ transitive et contient R .

Or S est la plus petite de cette forme donc

$$S = R^+$$

Donc R^+ est la P-fermeture de R pour la transitivité.

4) P = "être réflexive et transitive"

P est une propriété de Moore

S P-fermeture de R .

hypothèses $\begin{cases} R \subset S \\ I_E \subset S \\ S \circ S \subset S \end{cases}$

$$\begin{aligned} R^* &= I_E \cup R^+ \\ \text{or } R^* \circ R^* &\subset R^* \end{aligned}$$

$$\underbrace{I_E \cup R^+}_{R^*} \subset S \subset R^*$$

$$\text{donc } S = R^*$$

Calcul du pt fixe est donc le calcul de la fermeture réflexive et transitive d'une relation.

Calcul de la fermeture réflexive et transitive d'une relation R sur E

. Le plus petit point fixe de $\tilde{R}$ dans l'ens. des surensemble de $F = \{x\}$ est $R^*(x)$

Pour calculer R^* il suffit de calculer pt fixe de $\tilde{R}$ par approximations successives.

$$\begin{cases} H_0 = F = \{x\} \\ H_{n+1} = \tilde{R}(H_n) \end{cases}$$

Lemme

Si $H_{n+1} = H_n$ alors $\forall p \in \mathbb{N} \quad H_{n+p} = H_n$
et donc H_n est le plus petit point fixe.

Th

Si E est fini alors $\exists i \quad \forall q \quad H_{i+q} = i$

Calcul machine

Soit $R \subset E \times E$ $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ fini

On associe à R la matrice $M_{n \times n} \langle \mathbb{B} \rangle \ni M_R$

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$
monit de $\wedge$ et $\vee$; demi-anneau

$$M_R(i, j) = \int_R(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathcal{E}$ relations sur E muni de $\cup$ et composition

$$\varphi : \mathcal{E} \rightarrow M_{n \times n} \langle \mathbb{B} \rangle \quad \text{application}$$

$$\varphi : R \rightarrow M_R$$

On a montré que φ est un morphisme de demi-anneaux :

$$\varphi(\emptyset) = \text{matrice nulle}$$

$$\varphi(R \cup S) = \varphi(R) \oplus \varphi(S)$$

$$\varphi(I_E) = \text{matrice diagonale}$$

$$\varphi(R \circ S) = \varphi(R) \odot \varphi(S)$$

$$\varphi(R^*) = \varphi\left(\bigcup_{0 \leq n} R^n\right) = \bigoplus_{0 \leq n} \varphi(R^n)$$

$$\varphi(R^n) = \varphi(\underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\varphi(R) \odot \dots \odot \varphi(R)}_{n \text{ fois}}$$

$$\varphi(R) = M_R$$

Le calcul de R^* se ramène à des calcul de matrices