(2) Soit K demi Anneau $\begin{pmatrix} \oplus, 0 \\ \odot, 1 \end{pmatrix}$

Soit $n \geqslant 2$

Soit $M_{n \times n} \langle K \rangle$ ensemble des matrices carrées de dimension $n \times n$ à coeff dans K

muni de :

- $\oplus$ $M \oplus N[i,j] = M[i,j] \oplus N[i,j]$

associative et commutative (issus de $\oplus$)

E/t Neutre X = matrice nulle.

- $\odot$ def comme le produit matricielle classique.

associative

E/t neutre I_n $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

X absorbant pour $\odot$

$\odot$ distributive pour $\oplus$

__Notations__

Soit K demi anneau avec $\begin{pmatrix} + & 0 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$

Soit $a \in K$

$$a^{n+1} = a^n . a \quad \text{avec} \quad a^0 = 1$$

$$a^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \qquad a^* = 1 + a^+$$

$$R^* = \bigcup_{n \geqslant 0} R^n \quad \text{et} \quad R^+ = \bigcup_{n > 0} R^n$$

Relations sur un ensemble E

Def Relation d'ordre

R
- reflexive
- anti symetrique
- transitive.

Rmq Si R relation d'ordre + d'équivalence alors R est l'identité.

Déf Pré-ordre

R . reflexive

. transitive

A partir de R on définit une nvelle relation S par

$(x,y) \in S \iff (x,y) \in R$ et $(y,x) \in R$

S est alors une relation d'équivalence

$([x],[y]) \in \hat{R} \overset{def}{\iff} (x,y) \in R$

On définit la relation $\hat{R}$ sur l'ens. des classes d'équivalence

$x' \in [x]$ $\quad (x',x) \in S \Rightarrow (x',x) \in R$

$y' \in [y]$ $\quad (y,y') \in S \Rightarrow (y,y') \in R$

si $(x,y) \in R$ $\quad (x',y') \in R \circ R \circ R \subset R$

$\hat{R}$ est alors une relation d'ordre

. reflexive $\forall x \; ([x],[x]) \in \hat{R}$

. transitive

$([x],[y]) \in \hat{R}$ et $([y],[z]) \in \hat{R} \Rightarrow (x,y) \in R \; (y,z) \in R$

$\iff (x,z) \in R \circ R \subset R$

$\Rightarrow ([x],[z]) \in \hat{R}$

. anti sym. on supp que $\left\{\begin{array}{l}([x],[y]) \\ ([y],[x])\end{array}\right. \in \hat{R}$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(x,y) \in R \\ (y,x) \in R\end{array}\right. \Rightarrow (x,y) \in S$ donc x et y

sont de la m̂ classe donc $[x]=[y]$

$\hookrightarrow$ A partir d'un pré-ordre R lorsque l'a passe au classes d'equivalences, $\hat{R}$ est une relation d'ordre.

Def Quasi ordre

R • transitive

• anti réfléxive : $R \cap I_E = \emptyset$

Rmq Si R anti-reflexive ET transitive alors R est anti symétrique.

Def Ordre Totale

ssi $\forall x, y \in E$ $(x,y) \in R$ OU $(y,x) \in R$

Def Intervalle

Soit R une relation d'ordre

Soient $x, y \in E$ tq $(x,y) \in R$

On appel intervalle entre x et y

$$[x,y] = \{ z \in E \, / \, (x,z) \in R \text{ et } (z,y) \in R \}$$

E est localement fini vis à vis de R ssi tous ses intervalles sont finis

Ex $\mathbb{N}$ $\leqslant$ localement finit

$\mathbb{Z}$ $\leqslant$ localement fini

$\mathbb{Q}$ $\leqslant$ Non

$\mathbb{R}$ $\leqslant$ Non

Def Successeur

Soit E ordonné par R et E localement fini
On peut définir la relation de <u>succession</u> par
y successeur de x

$$(x,y) \in S \iff (x,y) \in R \text{ et } [x,y] = \{x,y\}$$

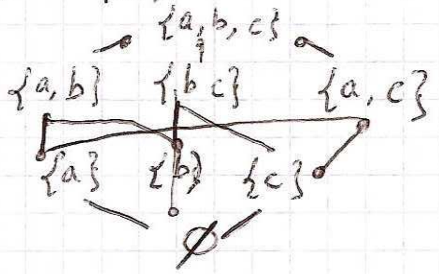
Def Diagramme de Hasse

Pour représenter 1 ordre sur un ensemble localement fini.
C'est la représentation sagitale de la relation de succession associé à R.
Avec la convention : $(x,y) \in R$ x est plus bas que y

Ex

1) $\mathbb{N}$ $\leqslant$ $S = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

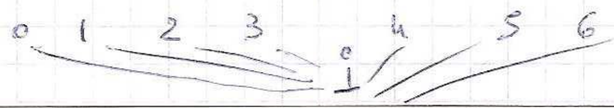
2) $\mathcal{P}(E)$ avec $E = \{a, b, c\}$ munit de $\subseteq$



Def Ordre plat

Soit E et $\bot \notin E$. Sur $E \cup \{\bot\}$ on définit la relation R par $(x,y) \in R \iff x = y$ ou $x = \bot$
C'est bien une relation d'ordre. $E \cup \{\bot\}$ localement fini

$E = \mathbb{N}$



Une suite croissante ou decroissante devient stationnaire si $\forall j \geq i \quad x_j = x_i$ au rang i

Une suite est strict. ↗ si elle est ↗ et $\forall i \quad x_{i+1} \neq x_i$

Idem ↘.

Constructions d'ordre

- Si $\leq_R$ est un ordre sur E et $\leq_S$ est un ordre sur F, sur $E \times F$ on definit la relation T :

$$((x,y),(x',y')) \in T \iff \begin{cases} x \leq_R x' \\ y \leq_S y' \end{cases}$$

T est un ordre

Rmq $\hat{m}$ si $\leq R$ et $\leq S$ sont des ordres totaux $\leq T$ ne l'est pas forcément.

Ex $\mathbb{N}, \leq$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad (2,5) \leq (3,7)$

$(1,6)$ et $(2,5)$ sont incomparables.

Généralisation

Soit les relations $\leq_1 \ \leq_2 \ldots \leq_n$ sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$

On definit $((x_1, x_2, \ldots x_n), (y_1, y_2, \ldots y_n)) \in L \overset{def}{\iff}$

$\exists i$ tq $\forall j < i \quad x_j = y_j$ et $x_i \leq_i y_i$ et $x_i \neq y_i$

ou bien $\forall j < n \quad x_j = y_j$ et $x_n \leq_n y_n$

Soit A un ensemble totalement ordonné par $\leqslant$.
Soit E_n l'ens. des suites de longueur n (n fixé) d'éléments de A. L'ordre lexicographique sur E_n induit par l'ordre de A est un ordre total.

Si E est totalement ordonné par $\leqslant$ l'ens E_n est totalement ordonné par l'ordre lexicographique induit par $\leqslant$ On prolonge l'ordre lex. sur E_n en un ordre sur l'ensemble des suites d'élts de E.

<u>1er méthode</u>

$((x_1, x_2, \dots x_n), (y_1, y_2 \dots y_n)) \in L \iff$
$\exists i < n$ tq $\forall j < i \quad x_j = y_j$ et $x_i \leqslant y_i$ et $x_i \neq y_i$
ou bien $\forall j < n \quad x_j = y_j$ et $x_n \leqslant y_n$
C'est un ordre total

<u>2em méthode</u>

$((x_1, x_2, \dots x_n), (y_1, y_2, \dots y_n)) \in H \iff$

$$\begin{cases} n < p \\ \text{ou} \\ x = p \text{ et } ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots y_n)) \in L \end{cases}$$

H est un ordre total.

<u>Prop.</u> Soit E ens. ordonné par $\leqslant$. Sont equivalentes :
(1) l'ordre est bien fondé
(2) toute partie $P \subset E$ qui vérifie :
(*) $\forall x \in E \; [y \in E \text{ et } y \quad x \Rightarrow y \in P] \Rightarrow x \in P$
est une partie qui est égale à E

Soit E ordonné par $\leq$

Soit $P \subset E$

x est un minorant de P : $\forall z \in P \quad x \leq z$

majorant $\quad x \geq z$

x est un maximum de P : $\forall z \in P \quad z \geq x \Rightarrow z = x$

minimum $\quad z \leq x \Rightarrow z = x$

+ petit elt de P est un elt x tq $\forall z \in P \quad x \leq z$

+ grand —— —— —— $\quad x \geq z$

x borne sup de $P \Leftrightarrow x =$ + petit des majorants

x borne inf ———— $x =$ + grand des minorants.

Ordre

L'ens des applications de $E \mapsto F$ peut s'ordonner par l'inclusion des relations (une app est une relation particulière)

$$f \subseteq g \quad \forall (x,y) \in f : (x,y) \in g$$

$$f, g : E \to F \quad y = f(x) \quad y = g(x)$$

Partout où f est définie g à la même valeur que f.

On suppose que F possède un ordre $\leq$.

On peut alors définir sur l'ens. des applications de $E \to F$ une relation R par :

$$f R g \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in E \quad f(x) \leq g(x)$$

On verifie facilement que R = relation d'ordre.

C'est la relation d'ordre sur l'ens des applications de $E \to F$ induite par l'ordre sur F.

Ens des fonctions : $E \to F$, soit $\perp \notin F$

- on définit $F' = F \cup \{\perp\}$ et sur F' l'ordre plat
  $x \leq y \iff x = \perp$ ou $x = y$
- on prolonge ttes les fonctions $E \to F$ en des applications de $E \to F'$: si $f(x)$ non défini on pose $f(x) = \perp$

  $f(x) \leq_{\perp} g \iff \forall x \in E \quad f(x) \leq g(x) \iff f(x) = \perp$ ou $f(x) = g(x)$

Partout où f est défini g l'est aussi et $f(x) = g(x)$.

Donc g est $\oplus$ définie, g prolonge f.

* ordre bien fondé (ou noethérien)
* bon ordre = bien fondé + linéaire (ou total).

Lemme Un ordre $\leqslant$ sur E est bien fondé ssi : toute partie non vide de E possède (au moins) un minimal

- si $\leqslant$ non bien fondé alors $\exists$ chaine $x_1 > \dots > x_n \dots$
- si $\exists$ une partie $F \neq \emptyset$ de E qui ne possède pas de minimal.

Théorème d'Induction

Soit $\leqslant$ un ordre sur E, sont equivalents :

- $\leqslant$ bien fondé

et

- $\forall$ partie non vide de E verifie
  $\forall x \in E \; [y \in E \text{ et } y < x \Rightarrow y \in P] \Rightarrow x \in P$