Maths Discrètes

Def 1

Soient $E_1, E_2 \dots E_n$ des ensembles. Le produit cartesien de ces ensembles est :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \dots x_n \in E_n \}$$

Def 2

Une relation n-aire dans $E_1, \dots, E_n$ est une partie $R \subset E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$

NB
- relation binaire entre E et F : $R \subset E \times F$
- $\forall$ relation peut être vue de façon binaire
  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_i \qquad F = E_{i+1} \times \dots \times E_n$
- $\emptyset$ est une relation particulière, vide
- $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est la relation totale ou pleine

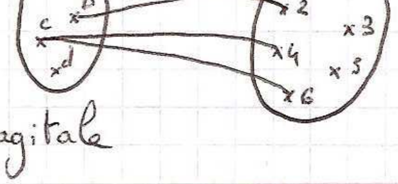
Def 3

R est plus fine que S ou S plus grossière que R ssi $R \subset S$

Soit $R \subset E \times F$

notations $(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x R y \quad \Leftrightarrow R(x, y)$

$R(x) = \{ y \in F \mid (x, y) \in R \}$ image de x dans R



$R = \{ (a,1), (a,2), (b,2), (c,4) (c,6) \}$

Representation Sagitale

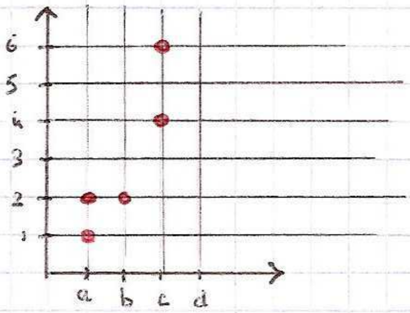
relation inverse de R : $R^{-1} = \{(y,x) \in F \times E \mid (x,y) \in R\}$

$$R^{-1} \subset F \times E$$

On inverse les flèches

$(R^{-1})^{-1} = R$

représentation cartésienne



Prop 1

R est une relation injective ssi :
$\forall x, x' \in E$, $\forall y \in F$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) \in R \\ (x',y) \in R\end{array}\right| \Longrightarrow x = x'$$

Prop 2

Une relation R est une fonction ssi : R^{-1} injective

$\Leftrightarrow$ R fonction ssi : $\forall x \in E$ $R(x)$ a au plus 1 élément

Prop 3

R relation surjective ssi : $\forall y \in F$, $\exists x \in E$
tq $(x,y) \in R$

Prop 4

R est une application ssi R^{-1} injective et surjective
$\forall x \in E$, $R(x)$ contient exactement 1 élément

Notation

Si R fonction on note $R : E \to F$, si $(x,y) \in R$ on note $R(x) = y$

Def 4

Une relation R est une bijection ssi : c'est une application, et si R^{-1} aussi une application

$\Leftrightarrow$ R application injective et surjective

Prop 5

Si R est une fonction on peut étendre R en une application en ajoutant un élément $\perp$ à F $(\perp \notin F)$ $F_\perp = F \cup \{\perp\}$

$R_\perp \subset E \times F_\perp$ $\quad (x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in R_\perp$

si $R(x) = \emptyset$ alors $(x, \perp) \in R_\perp$

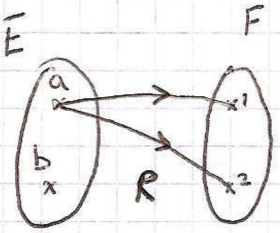
Def 5

Soit $R \subset E \times F$. $R(x) \subset F$. $2^F = \mathcal{P}(F)$

$\hat{R} \subset E \times 2^F$

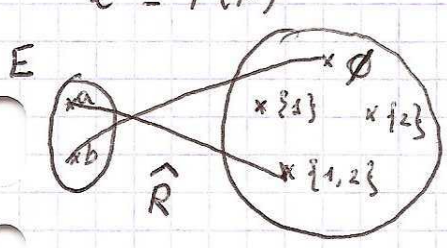
$\hat{R}(x) = R(x)$

$\hat{R}$ est une application



$R(a) = \{1,2\}$, $R(b) = \emptyset$

$2^F = P(F)$



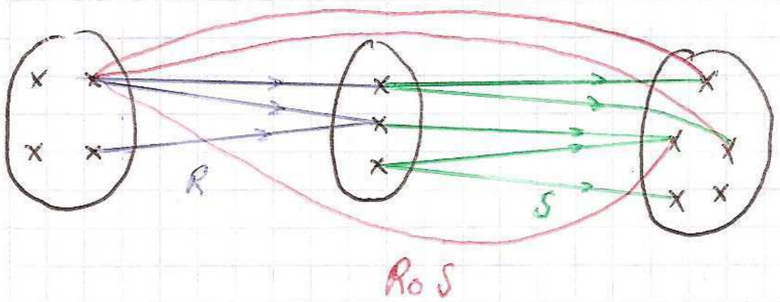
Si R elle même une application alors $\hat{R}$ va uniquement dans ens à 1 élément de $2^F \Rightarrow R, \hat{R}$ se confondent

Def 6 Une relation binaire sur E = relation binaire entre E et E

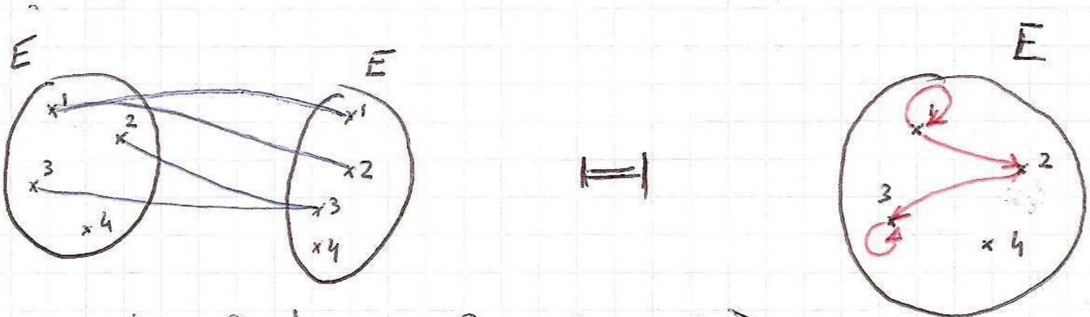
Def 7

Soit $R \subset E \times F$, $S \subset F \times G$, la composition entre R et S : $R \circ S$ est une relation entre E et G définie par :

$$R \circ S = \{ (x, z) \in E \times G \mid \exists y \in F \quad (x,y) \in R \ \underline{\underline{\text{et}}} \ (y,z) \in S \}$$



$$(R \circ S)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$



// Théorie des Graphes : $G = \langle E, R \rangle$

ensemble sommets — relation sur E arcs

Identité sur E. $I_E = \{ (x, x) \mid x \in E \}$

Prop 6 $\forall R \subset E \times E \quad I_E \circ R = R$

$R \circ I_E = R$

Dans l'ensemble des relations sur E, la composition est une operation ou loi interne.
Pour cette operation I_E est l'élément neutre

Prop 7

$\forall R, S, T$ relations sur E
$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ // associativité

ens R sur E munit de compositions est un monoide

Notation : $R^2 = R \circ R$ $\quad R^{n+1} = R^n \circ R$
$R^1 = R$ $\quad R^0 = I_E$

Prop 8

Dans l'ensemble des relations sur E :
L'union $\cup$ est une operation qui possède un élément neutre : $\emptyset$ et est associative et commutative ($R \cup S = S \cup R$)

monoide commutatif pour l'union $\cup$.

La compositions dest relations est distributive par rapport à l'union
$R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$
$(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$

Rmq $\forall R$ $\quad \emptyset \circ R = R \circ \emptyset = \emptyset$
$\emptyset$ est absorbant pour la compositions.

Prop Résumée

L'ensemble des relations sur E muni de la loi union et la loi composition est un <u>demi-anneau</u>

- 1er loi monoïde commutatif
- 2em loi monoïde
- 2em loi distributive / à la 1ère
- elt neutre de la 1er est absorbant pour la 2em

Props interessantes

- reflexivité

  R reflexive ssi $I_E \subset R$

- symétrie

  R symetrique ssi $R \subset R^{-1}$

- transitivité

  R transitive ssi $R \subset R \circ R$

R <u>relation d'equivalence</u> ssi R <u>reflexive</u>, <u>symétrique</u> et <u>transitive</u>

$\forall x \in R$ la classe de x modulo R :

$$[x]_R = \{ y \in E \,/\, (x, y) \in R \}$$

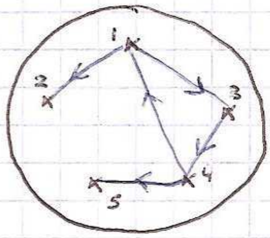
est une classe d'equivalence

Rmq l'ens. des classes d'equivalence constitue une partition de E.
Soit tout élt de E est dans une seule et unique classe.

Def 8

Soit R une relation sur E.

Une chaine de longueur n est une suite $(x_0, x_1 .. x_n) \in E^{n+1}$ tq $\forall i < n \ (x_i, x_{i+1}) \in R$



$(1, 3, 4, 1, 2)$ chaine long. 4

Une chaine est un cycle ssi $x_0 = x_n$

ex: $(1, 3, 4, 1)$

R est acyclique si il n'existe aucun cycle

Notations $R^+ = \bigcup_{n>0} R^n$ $R^* = I_E \cup R^+ = \bigcup_{n \geq 0} R^n$

Soit $M^{\otimes}$ et $N^{\oplus}$ deux monoïdes et $\varphi : M \to N$ app.

φ est un omorphisme de monoïde ssi

$\varphi(e_M) = \varphi(e_N)$ et si $\forall x, y$

$\varphi(x \otimes y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$

Ex On considère $\begin{cases} \text{alphabet } A = \{a, b\} & A^* \text{ ens des mots} \\ \mathbb{N}, + \end{cases}$

$\varphi(a) = 1 \quad \varphi(b) = 0$

$\varphi(baba) = \varphi(b) + \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(a) = 0+1+0+1 = 2$

Def Demi Anneau

Soit E un demi-anneau $(+_E \ \times_E)(0_E, 1_E)$

F un demi anneau $(+_F \ \times_F)(0_F, 1_F)$

$\varphi : E \to F$ appl. est un morphisme de demi-anneaux ssi :

φ morphisme de monoïde pour les 1er et 2em lois càd : $\varphi(0_E) = 0_F$

$$\varphi(x +_E y) = \varphi(x) +_F \varphi(y)$$

$$\varphi(1_E) = 1_F$$

$$\varphi(x \times_E y) = \varphi(x) \times_F \varphi(y)$$

Exemples

- $(\mathbb{N}, +, \times)$
- $(\mathbb{B} = \{0, 1\}, \vee, \wedge)$

2 Façons de construire ½ Anneau à partir d'un monoïde :

① Soit M monoïde pour loi $\bullet$ d'elt neutre 1

½ Anneau $\mathcal{P}(M)$. $\cup$ union monoïde com. d'elt neutre $\emptyset$

. $\odot$ produit induit par le produit sur M

dem

$$A \odot B = \{z \in M \,/\, \exists x \in A \;\; y \in B \;\; tq \;\; x \bullet y = z\}$$

$$\{1\} \odot B = \{z \in M \,/\, \exists y \in B \;\; tq \;\; y = z\} = B = B \odot \{1\}$$

$\Rightarrow \{1\}$ elt neutre de $\odot$

$$(A \odot B) \odot C = \{t \in M \,|\, \exists z \in (A \odot B), \exists u \in C \;\; tq \;\; zu = t\}$$

$$= \{t = M \,|\, \exists \; x \in A \;\; y \in B \;\; x.y = z, \; \exists u \in C \;\; zu = t$$

$$= \text{———} \quad x.(y.u) = t\}$$

$$= \text{———} \; x \in A \quad v \in B \odot C \quad tq \quad xv = t\} = A \odot (B \odot C)$$

$\mathcal{P}(M)$ monoïde pour la loi $\odot$ qui est distributive /à l'union $\cup$ (pass dem ...)

$\emptyset$ absorbant pour $\odot$ (pass dem ...)