Exercice 1 Considérez les systèmes suivants d'équations linéaires droites sur l'alphabet $\{a, b\}$. (On rappelle que 1 dénote le mot vide c'est-à-dire le seul mot de longueur 0.) Pour tels systèmes, les solutions sont des langages rationnels (réguliers). Décrivez-les, soit en français, soit en utilisant des expressions rationnelles. (Eventuellement, dessinez des automates finis qui reconaissent les langages). Calculez les premiers approximants.

1. $\begin{cases} S_0 &= 1 + aS_1 + bS_1 \\ S_1 &= aS_0 + bS_0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} S_0 &= aS_0 + bS_0 + aS_1 \\ S_1 &= b \end{cases}$

3. $\begin{cases} S_0 &= aS_0 + bS_1 + 1 \\ S_1 &= aS_1 + bS_2 \\ S_2 &= aS_2 + bS_0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} S_0 &= aS_0 + bS_1 \\ S_1 &= aS_1 + bS_2 \\ S_2 &= aS_2 + 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} S_0 &= aS_0 + bS_1 + aS_2 + 1 \\ S_1 &= bS_1 + aS_2 + 1 \\ S_2 &= bS_0 + aS_2 + bS_2 + 1 \end{cases}$

Exercice 2 Les expressions françaises suivantes décrivent des langages rationnels sur $\{a, b\}^*$ Pour chaque langage, trouvez une expression rationnelle qui le caractérise, et une grammaire linéaire droite qui l'engendre.

1. Le langage de tous les mots qui contiennent au moins deux b.
2. Le langage de tous les mots qui ne se terminent pas avec ab.
3. Le langage de tous les mots qui ne contiennent pas le mot bba.
4. Le langage de tous les mots qui contiennent les mot bb et le mot aba.

Exercice 3 Considérez les grammaires algébriques suivantes sur l'alphabet $\{a, b\}$. Pour chaque grammaire G, trouvez une grammaire *propre* G' qui engendre le même langage que G, moins le mot vide 1.

1. $\begin{cases} S_0 &\to 1 + aS_1 + bS_1 \\ S_1 &\to aS_0 + S_0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} S_0 &\to aS_0S_1S_2 \\ S_1 &\to aS_1 + S_2 \\ S_2 &\to bS_2 + 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} S_0 &\to aS_0S_1 + S_2 + 1 \\ S_1 &\to bS_1 + aS_2 + 1 \\ S_2 &\to bS_0 + aS_2 + bS_2 + 1 \end{cases}$

Exercice 4 Rappelez-vous de la définition de grammaire *réduite*. Montrez que la grammaire suivante n'est pas réduite, et trouvez une grammaire réduite équivalente.

$$\begin{cases} S_0 &\to S_1S_2 \\ S_1 &\to aS_1 \mid S_2aS_3 \mid aaa \\ S_2 &\to bS_2b \mid a \\ S_3 &\to S_3S_1 \mid S_1S_3 \end{cases}$$

Exercice 5 Considérez les grammaires algébriques suivantes sur l'alphabet $\{a, b\}$. Pour chaque grammaire, décrivez le langage engendré par S_0.

1. $S_0 \rightarrow 1 \mid aS_0a \mid bS_0b$
2. $S_0 \rightarrow a \mid b \mid aS_0a \mid bS_0b$
3. $\begin{cases} S_0 & \rightarrow & aS_0a \mid bS_0b \mid S_1 \\ S_1 & \rightarrow & aS_2b \mid bS_2a \\ S_2 & \rightarrow & aS_2a \mid bS_2b \mid a \mid b \mid 1 \end{cases}$

Exercice 6 Considérez la troisième grammaire de l'exercice précédent. Dessinez l'arbre de dérivation du mot *ababaaaaba*.

Exercice 7 Considérez les langages suivantes (sur un alphabet $\{a, b\}$ ou bien sur un alphabet $\{a, b, c\}$). Montrez qu'ils sont algébriques.

1. $L_0 = \{a^n b^m \mid m \geq n \geq 0\}$;
2. $L_1 = \{a^n b^* c^n \mid n \geq 0\}$;
3. $L_2 = \{a^n b^m c^k \mid n = m + k\}$;
4. (Difficile) le langage des mots qui ne sont pas palindromes.

Exercice 8 Considérez la grammaire suivante :

$$S \rightarrow a \mid Sa \mid aS \mid bSS \mid SSb \mid SbS$$

Par induction sur la longueur de la dérivation, prouvez que tout mot du langage engendré contient strictement plus de a que de b. Dessinez un arbre de dérivation du mot *bababaaaa*. Est-ce qu'il s'agit d'une grammaire ambiguë ? Si oui dessinez un autre arbre de dérivation pour le mot *bababaaaa*

Exercice 9 Considérez les grammaires suivantes. Pour chacune, montrez qu'elle est ambiguë, et, si possible, construisez une grammaire non-ambiguë équivalente.

1. $S \rightarrow SS \mid a \mid b$
2. $S \rightarrow 1 \mid aSb \mid aSbb$
3. $S \rightarrow 1 \mid aSb \mid abS$
4. $\begin{cases} S_0 & \rightarrow & S_1S_2S_1 \\ S_1 & \rightarrow & 1 \mid aS_1 \\ S_2 & \rightarrow & 1 \mid bS_2 \end{cases}$

Exercice 10 Considérez les grammaires suivantes. Pour chacune, dites si elle est ambiguë. Si oui trouvez un mot qui possède deux arbres de dérivation différents.

1. $S \rightarrow aSSb \mid ab$
2. $S \rightarrow aSbSb \mid a$
3. $S \rightarrow aSbSa \mid a$

Exercice 11 Considérez les grammaires suivantes. Pour chacune, trouver une grammaire equivalente en forme normale de Chomsky. Il sera nécessaire d'utiliser plusieurs variables.

1. $S \rightarrow SS \mid aSb \mid 1$
2. $S \rightarrow SaSb \mid 1$
3. $S \rightarrow aSSb \mid ab$
4. $S \rightarrow aSb \mid bSa$

Exercice 12 En utilisant le Lemme de Ogden, prouvez que le langage des "repetitions" :

$$\left\{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\right\}$$

n'est pas algébrique.