

Nom :

Prénom :

Numéro d'étudiant :

Numéro d'anonymisation : **1**

## Mathématiques discrètes

### Examen

**Consignes** Vous avez 2 heures pour compléter l'examen. Il y a quatre exercices. Vous devrez répondre sur le sujet. Si vous manquez de place pour inscrire vos réponses sur ce sujet (mais en principe vous ne devriez pas), indiquez-le et inscrivez la suite sur une copie cachetée en remplissant votre **nom** et en recopiant votre **numéro d'anonymisation : 1**

Merci de respecter les consignes suivantes :

- Tous les appareils électroniques doivent être éteints et rangés dans votre sac placé à l'avant de la salle.
  - Documentation autorisée: 1 feuille A4 recto verso écrite de votre main.
  - Inscrivez vos nom, prénom et numéro d'étudiant dans l'onglet ci-dessus avant de le replier et de le coller.
-

(page vide)



Numéro d'anonymisation : 1

**Exercice 1 : (4 points) Quatre questions à choix multiples**

Chaque question a exactement **une** réponse correcte. Veuillez à **colorier entièrement** la case à côté de la réponse de votre choix. Pour éviter les ambiguïtés, veuillez à ce que votre choix final soit clair, et ne laissez pas d'autres marques (comme brouillon) sur cette page.

**Question 1** Combien de graphes 5-réguliers existent sur 7 sommets ?

- 1       35       0        $\binom{7}{5}$

**Question 2** Si un graphe connexe planaire possède 6 sommets et 3 faces, combien d'arêtes possède-t-il alors ?

- 7       6       9       15

**Question 3** Un comité est composé de quatre membres, dont un membre est président. Combien de façons y a-t-il de choisir un tel comité dans un groupe de cinquante personnes ? Ici, deux comités ayant les mêmes membres mais un président différent ne sont pas considérés comme le même comité.

- $50 \times 49 \times 48 \times 47$         $\binom{50}{4}$         $4 \times \binom{50}{4}$         $4 \times 50^4$

**Question 4** Vous recevez trois cartes différentes d'un jeu de douze cartes, qui sont numérotées 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, et 120. Quelle est la probabilité que toutes vos cartes aient une valeur inférieure ou égale à 60 ?

- $\frac{1}{8}$         $\frac{1}{3}$         $\frac{1}{11}$         $\frac{1}{2}$

(page vide)











(page vide)

**Exercice 4 : (6 points) La roulette**

La roulette est un célèbre jeu de casino, dans lequel un numéro entre 0 et 36 est tiré uniformément aléatoirement. Chaque numéro de la roulette est associé à une couleur : il y a 18 numéros rouges (couleur claire), 18 numéros noirs (couleur sombre), et un numéro spécial (ni rouge ni noir), le 0. Les joueurs payent une somme de leur choix (appelée mise) pour miser sur différents événements, comme “le numéro tiré est rouge” ou “le numéro tiré est impair”. Si le pari est raté, la mise est perdue. En cas de pari réussi, les gains dépendent de la mise : miser sur “pair”, “impair”, “rouge”, ou “noir” double la mise. Miser sur une colonne triple la mise. Enfin, miser sur un numéro rapporte 36 fois la mise. Un tapis de roulette est représenté sur l'image ci-dessous ; les numéros rouges sont : 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36, les numéros noirs sont : 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35, et 0 n'est ni rouge ni noir.

			0				
PASSE	1	2	3	MANQUE			
	4	5	6				
	7	8	9				
	10	11	12				
PAIR	13	14	15	IMPAIR			
	16	17	18				
	19	20	21				
	22	23	24				
◆	25	26	27	◆			
	28	29	30				
	31	32	33				
	34	35	36				
12 <sup>P</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>D</sup>			12 <sup>D</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>P</sup>

1. Décrivez l'espace de probabilité (univers et loi) associé au jeu de la roulette.

---



---



---

On définit les événements suivants (on note que le zéro n'appartient à aucune colonne) :

- A. Le numéro tiré est rouge.
- B. Le numéro tiré est pair et supérieur à 1.
- C. Le numéro tiré appartient à la première colonne.

2. Donnez pour chacun des événements suivant le sous-ensemble qui lui est associé, ainsi que sa probabilité :  $A$ ,  $B^c$ ,  $A \cap C$ . On rappelle que  $B^c$  indique le complémentaire de  $B$  dans l'univers  $\Omega$ .

---



---



---

---

---

---

3. Les événements  $A$  et  $C$  sont-ils indépendants ? Déterminez votre réponse.

4. Un joueur fait les trois paris suivants :

- Le numéro tiré sera noir ;
- Le numéro tiré sera dans la dernière colonne ;
- Le numéro tiré sera impair.

Un numéro est tiré à la roulette. Calculez la probabilité que le joueur gagne au moins deux de ses trois paris (en un seul tirage).

---

---

---

---

Un joueur décide d'utiliser la stratégie suivante : il mise toujours sur "noir". Sa mise initiale est de 1 €. À chaque fois qu'il perd, il rejoue en doublant sa mise précédente (1€ la première partie, 2€ la seconde, 4€ la troisième, *etc.*). Dès qu'il remporte une mise, il s'arrête de jouer.

5. Montrez par récurrence sur  $n \geq 1$  que pour pouvoir jouer  $n$  fois, le joueur doit disposer d'un capital d'au moins  $2^n - 1$  euros. Si le joueur gagne au bout de  $n$  parties, quel est son gain net (c'est-à-dire son gain après la partie par rapport à l'argent dont il disposait initialement) ?

---

---

---

---

6. Soit  $n \geq 1$ . Donnez la probabilité que le joueur joue exactement  $n$  parties avant de s'arrêter (on suppose que son capital est illimité).

---

---

---

---