Nom :

Prénom :

Numéro d'étudiant :

Numéro d'anonymisation : **1**

Mathématiques discrètes
Examen

Consignes Vous avez 2 heures pour compléter l'examen.
Il y a un QCM et deux exercices et vous devrez répondre sur le sujet. Si vous manquez de place pour inscrire vos réponses sur ce sujet (mais en principe vous ne devriez pas), indiquez-le et inscrivez la suite sur une copie cachetée en remplissant votre **nom** et en recopiant votre **numéro d'anonymisation : 1**
Merci de respecter les consignes suivantes :

- Tous les appareils électroniques doivent être éteints et rangés dans votre sac placé à l'avant de la salle.
- Documentation autorisée: 1 feuille A4 recto verso écrite de votre main.
- Inscrivez vos nom, prénom et numéro d'étudiant dans l'onglet ci-dessus avant de le replier et de le coller.

(page vide)

Exercice 1 : QCM Répondre sur le sujet.

Question 1 **On considère la version simplifiée du jeu de taquin suivante: 5 petits carreaux blancs, 5 petits carreaux noirs et 5 petits carreaux rouges peuvent glisser dans un cadre 4×4, où il reste donc 1 case vide. Combien de positions différentes existent dans ce jeu?**

☐ $16\binom{15}{5}$ ☐ $16 \times \binom{15}{5} \times \binom{10}{5}$ ☐ $16 \times 14!$ ☐ $16 \times \binom{15}{5}^2$ ☐ $5^{16}\binom{16}{1}$ ☐ $\frac{16!}{2!}$

Question 2 **On lance 5 dés à 6 faces en même temps, quelle est la probabilité d'obtenir un *full* (exactement 3 dés identiques et 2 dés identiques, au total 2 valeurs différentes sur l'ensemble des dés)**

☐ $\frac{1}{6^5} 6 \cdot 5 \frac{5!}{3!2!}$ ☐ $\frac{1}{6^5} 6^3$ ☐ $\frac{1}{6^5} \frac{5!}{3!3!}$ ☐ $\frac{1}{6^5} \frac{6!}{3!5!}$

Question 3 **Dans un QCM, on pose 8 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées et une seule est correcte. On attribue les points comme suit : *"Si la réponse est correcte, alors 5 points. Si la réponse est fausse, alors -2 points."* Pour chaque question, un étudiant choisit au hasard uniformément une réponse par question. Quel est le nombre de points moyen au QCM ?**

☐ 0 ☐ $-\frac{8}{4}$ ☐ -8 ☐ 1

N.B. Ce barème ne s'applique pas à cet examen.

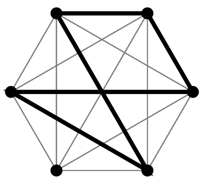
Question 4 **Sur un échiquier, de combien de manières est-il possible de choisir deux cases sans que ces cases n'appartiennent à la même colonne ou la même ligne, sachant qu'un échiquier est un plateau carré de 8 par 8 cases.**

☐ $8^2 \times 7^2$ ☐ $(8!)^2 \times (7!)^2$ ☐ $8! \times 7!$ ☐ $8 \times 7 \times 6 \times 5$ ☐ $(8)^4$ ☐ $\binom{8}{2}^2$

Question 5 **On lance 4 fois une pièce biaisée qui donne $\texttt{p}$ une fois sur trois. Quelle est la probabilité d'avoir 3 $\texttt{f}$ et 1 $\texttt{p}$?**

☐ $4\binom{4}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ☐ $\frac{5}{36}$ ☐ $3^{-3}\binom{4}{3}$ ☐ $4 \times 3^{-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ☐ $\frac{7}{52}$

Question 6 **Combien y a-t-il de sous-graphes à 6 sommets du graphe complet ci-dessous contenant exactement 3 arêtes indiquées en gras et 5 arêtes non grasses)?**



☐ $\frac{10!}{5!3!2!}$ ☐ $2^3 2^5$ ☐ $\frac{15!}{7!}$ ☐ $\frac{15!}{5!3!2!}$ ☐ $\binom{15}{8}$ ☐ $2^2 2^5$

Question 7 **Dans un graphe planaire 3-régulier (tous les sommets ont degré 3), si le nombre de faces est 6 alors il y a:**

☐ **16 sommets** ☐ **8 arêtes** ☐ **16 arêtes** ☐ **8 sommets**

(page vide)

Exercice 2 : (7 points) Répondre sur le sujet

On définit les graphes Apolliniens récursivement comme suit. Un triangle est un graphe Apollinien. On obtient un graphe Apollinien à partir d'un autre en plaçant un sommet dans une face triangulaire et en reliant ce nouveau sommet aux 3 sommets de la face qui l'entoure.

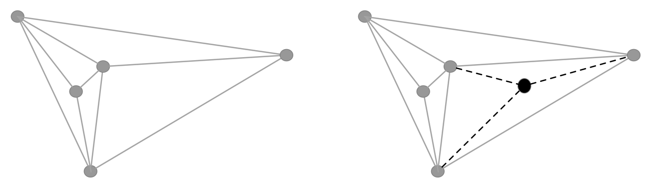


FIGURE 1 – Le graphe Apollinien de droite est obtenu à partir de celui de gauche.

Soit GA_n un graphe apollinien à n sommets.

1. Donner une expression $A(n)$ pour a le nombre d'arêtes de GA_n en fonction de n, le nombre de sommets. Prouver par récurrence que cette expression est correcte.

2. Donner une expression $F(n)$ pour f le nombre de faces de GA_n en fonction de n. Prouver par récurrence que cette expression est correcte.

3. Donner (sans preuve) une expression $D(n)$ pour le degré moyen des sommets de GA_n. (Penser à vérifier votre réponse pour $n = 3$.)

4. Rappeler la formule d'Euler pour les graphes connexes et planaires.

5. Rappeler et donner la preuve par double comptage de l'inégalité qui relie le nombre d'arêtes a et le nombre de faces f d'un graphe planaire. (L'inégalité attendue est différente de la formule d'Euler et ne fait pas intervenir le nombre de sommets.)

6. Combiner la formule d'Euler et la relation précédente pour obtenir une borne sur le degré moyen des graphes planaires connexes.

7. Montrer que si on ajoute une arête quelconque à GA_n, alors le graphe G ainsi obtenu n'est pas planaire.

Exercice 3 : (7 points) Répondre sur le sujet

On considère le lancer de deux dés, et on choisit comme événement élémentaire la *somme* des deux valeurs obtenues.

1. Donner explicitement l'espace de probabilité décrit ci-dessus, c.à.d. son univers et sa fonction de probabilité. (Attention: *ce n'est pas* un espace à probabilité uniforme).

Le jeu de casino *craps* (simplifié) se joue comme suit :

- le joueur (qu'on appelera J) mise d euros, contre le casino.
- J lance deux dés. Soit r_1 la somme des deux valeurs obtenues. Si $r_1 = 7$ ou $r_1 = 11$, J récupère deux fois sa mise et la partie se termine. Si $r_1 \in \{2, 3, 12\}$, J perd sa mise et la partie se termine.
- Si $r_1 \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, le jeu entre dans sa deuxième phase: J lance successivement les deux dés en obtenant les résultats $r_2, r_3, \ldots$ jusqu'à obtenir le résultat 7 ou de nouveau le résultat r_1, après quoi la partie termine. Si le dernier lancer a donné 7, J perd sa mise. Si le dernier lancer a donné r_1, J récupère deux fois sa mise.

On décrira une partie par le uplet de résultats obtenus $(r_1, r_2, ..., r_f)$. L'entier f est le nombre total de lancers, appelé *longueur* de la partie. Par exemple, (7) est une partie de longueur 1, tout comme (2) (de longueur 1) , $(10, 8, 10)$ (de longueur 3) et $(5, 9, 2, 12, 7)$ (de longueur 5), mais (6), $(4, 5, 8)$ et $(4, 6, 7, 4)$ ne sont pas des parties.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, exhiber une partie dont la longueur est supérieure à n.

3. Chaque partie se produit avec une certaine probabilité. Par exemple, la probabilité de la partie (2) est $\frac{1}{36}$. Calculer la probabilité de la partie (7), puis celles des parties $(5, 7)$ et $(10, 9, 8, 10)$ (remarquer que les différents lancers sont indépendants les uns des autres).

4. Soit G_f l'événement "la longueur de la partie est f et J gagne", et P_f l'événement "la longueur de la partie est f et J perd". Donner explicitement les événements G_1, P_1, G_2 et P_2, c.à.d. donner pour chacun de ces événements l'ensemble de parties qui le composent, puis calculer la probabilité de chacun de ces événements.

5. Soit Ω^* l'ensemble de toutes les parties. Définir la fonction de probabilité associée à Ω^* (c.à.d. donner la probabilité de la partie générique $(r_1, \ldots, r_f)$).

6. Si $r_1 = 4$, J entre dans la deuxième phase de la partie, et on peut regrouper les résultats des lancers suivants en trois catégories :

- $\{4\}$: la partie termine et J gagne. Probabilité $\frac{1}{12}$.
- $\{7\}$: la partie termine et J perd. Probabilité $\frac{1}{6}$.
- $\{2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ la partie continue. Probabilité $\frac{3}{4}$.

Pour $n \geqslant 2 \in \mathbb{N}$, considérons l'événement qui contient toutes les parties $(r_1, \ldots, r_f)$ telles que $r_1 = 4$, $r_f = 4$ et $f = n$. Quelle est sa probabilité ?

7. Calculer la probabilité que J gagne en sachant que $r_1 = 4$. Rappel: si $0 < x < 1$, $\sum_{i \geqslant 0} x^i = \frac{1}{1-x}$.

8. Refaire le calcul du point précédent pour $r_1 = 5$ et $r_1 = 6$ (et remarquer que les cas $8, 9, 10$ sont équivalents à $6, 5, 4$, respectivement).

9. J joue une partie de craps. Quelle est son espérance de gain ?