Mathématiques discrètes
Examen

Numéro d'anonymisation : **150**

Consignes Vous avez 3 heures pour compléter l'examen.
Il y a 4 exercices et vous devrez rendre le sujet et deux copies cachetées:

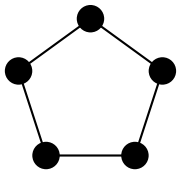
1. QCM : Répondre sur le **sujet**
2. Exercice 2: Répondre sur le **sujet**
3. Exercice 3: Répondre sur une **première** copie cachetée en remplissant votre **nom** et en recopiant votre **numéro d'anonymisation : 150**
4. Exercice 4: Répondre sur une **deuxième** copie cachetée, en remplissant votre **nom** et en recopiant votre **numéro d'anonymisation : 150**

Si vous manquez de place pour inscrire vos réponses sur ce sujet (mais en principe vous ne devriez pas), indiquez-le et inscrivez la suite sur une copie. Merci de respecter les consignes suivantes :

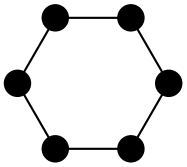
- Tous les appareils électroniques doivent être éteints et rangés dans votre sac placé à l'avant de la salle.
- Documentation autorisée: 1 feuille A4 recto verso écrite de votre main.
- Reportez le numéro d'anonymisation ci-dessus sur une copie cachetée pour l'exercice 3 et sur une autre copie cachetée pour l'exercice 4. Rendez ce sujet à l'intérieur des copies. NE PAS ÉCRIRE VOTRE NOM SUR CETTE FEUILLE.
- Le barême est donné à titre indicatif et peut être modifié.

Exercice 2 : (5 points) Répondre sur le sujet.

1. Donner le complémentaire des graphes suivants.



C_5



C_6

2. Vrai ou faux? Si Vrai, donner la preuve, sinon donner un contre-exemple. Soit C_n le graphe formé d'un cycle de n sommets.

1. Pour tout $n \geqslant 4$, le complément de C_n est connexe.
2. Pour tout $n \geqslant 5$, le complément de C_n est connexe.
3. Pour tout $n \geqslant 5$, le complément de C_n est un cycle.
4. Pour tout $n \geqslant 5$, le complément de C_n est acyclique.
5. Pour tout $n \geqslant 5$, le complément de C_n contient un cycle.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 7$, $n! \geqslant 3^n$. *Indication:* $7! = 5040$ *et* $3^7 = 2087$.

Exercice 3 : (5 points)

Nous supposerons dans cet exercice vouloir trier des tableaux d'entiers de longueur n, remplis, pour simplifier, par les valeurs $\{1, \ldots, n\}$ (toutes les valeurs dans le tableau sont différentes). Parmi les algorithmes de tri classiques figure le tri par arbre binaire de recherche. Un arbre binaire de recherche (abrégé par la suite en ABR) est un arbre binaire dont les nœuds sont étiquetés par des entiers et tels que les étiquettes du sous-arbre gauche soient plus petites que l'étiquette de la racine de l'arbre, elle-même plus petite que l'ensemble des étiquettes du sous-arbre droit.
Le tri par arbre binaire de recherche consiste à insérer successivement dans un arbre binaire de recherche initialement vide les entrées du tableau lues de gauche à droite, puis à effectuer une lecture infixe de l'arbre en question. Nous noterons Tri l'application qui associe à un tableau son ABR. Un exemple est présenté figure 1.
Pour rappel, une lecture infixe d'un arbre est obtenue en faisant une lecture infixe des étiquettes de son sous-arbre gauche, en lisant l'étiquette de la racine de l'arbre, puis en faisant une lecture infixe des étiquettes de son sous-arbre droit. Une lecture préfixe d'un arbre est obtenue en lisant l'étiquette de la racine de l'arbre, puis en faisant une lecture préfixe des étiquettes de son sous-arbre gauche, puis en faisant une lecture préfixe des étiquettes de son sous-arbre droit.

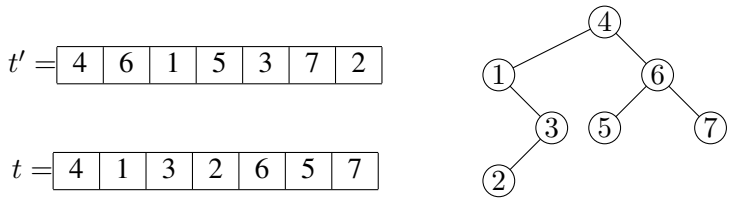


FIGURE 1 - Exemple de deux tableaux t, t' ayant le même ABR ($\mathrm{Tri}(t) = \mathrm{Tri}(t')$, et l'ABR associé.

1. Combien y a-t-il de tableaux différents à n cases, remplis par des valeurs distinctes dans $\{1, \ldots, n\}$?
2. Pour $n = 3$, donner l'ensemble des tableaux possibles ainsi que les ABR associés.
3. Montrer que l'application Tri est surjective. On pourra utiliser la lecture préfixe d'un ABR. Que peut-on en déduire sur le cardinal de l'ensemble des ABR par rapport à celui de l'ensemble des tableaux ?

Nous cherchons maintenant à savoir, pour un ABR fixé T, combien il y a de tableaux à qui l'algorithme de tri associe ce même arbre T. Ce nombre sera noté $m(T)$.
Soit V un ensemble de valeurs et t un tableau. Notons $t_{|V}$ le tableau t dont on n'a gardé que les valeurs dans V sans en changer l'ordre. Par exemple, sur la figure 1, $t_{|\{1,2,3\}} = [1, 3, 2]$ et $t_{|\{5,6,7\}} = [6, 5, 7]$.

4. Soit t un tableau de longueur n tel que $t[0] = k+1$. Montrer que $\mathrm{Tri}(t) = \mathrm{Tri}(t')$, pour tout tableau t' tels que $t'[0] = k + 1$, $t_{|\{1,\ldots,k\}} = t'_{|\{1,\ldots,k\}}$ et $t_{|\{k+2,\ldots,n\}} = t'_{|\{k+2,\ldots,n\}}$.
5. Considérons un arbre T sur n sommets, en déduire de la question précédente la formule reliant $m(T)$ à $m(T_g)$ et $m(T_d)$, pour T_d le sous-arbre doit de T et T_g son sous-arbre gauche. On pourra dans un premier temps établir cette formule pour un arbre T avec un sous-arbre gauche de taille fixée k, puis en déduire une formule générale en sommant suivant les valeurs possibles de k.
6. En déduire $m(T)$ pour T l'ABR associé au tableau $[3, 2, 1, 5, 4, 6]$.

Exercice 4 : (5 points)

Les cases d'un tableau M de n lignes et n colonnes sont coloriées aléatoirement en blanc ou en noir, avec probabilité uniforme et de manière indépendante les unes des autres.
$C = \{B, N\}$ désigne l'ensemble des couleurs, et, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $M[i, j]$ désigne la case de M de ligne i et colonne j. Donc par exemple, $M[1, 2] = N$ signifie que la case à la ligne 1 et colonne 2 est noire.

1. Donnez l'ensemble Ω des événements élémentaires associés à cette expérience. Quel est le cardinal de Ω? S'agit-il d'un espace à probabilité uniforme? Quelle est la probabilité de chaque événement élémentaire?

2. Donnez la probabilité des évenements suivants:
- $A =$ "toutes les cases ont la même couleur".
- $B =$ "il existe au moins une case blanche et au moins une case noire".
- $C =$ "M est symétrique" (c.à.d.: pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $M[i, j] = M[j, i]$).

3. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $c \in C$, soit L_i^c l'événement "toutes les cases de la ligne i ont la couleur c", et K_i^c l'événement "toutes les cases de la colonne i ont la couleur c".
- Quel est la probabilité des événements L_i^c et K_i^c?
- Pour chaque couple d'événements dans la liste suivante, calculer la probabilité de leur intersection et dire s'il s'agit d'événements indépendants:
  $L_1^B, L_n^B \quad ; \quad L_1^B, K_n^B \quad ; \quad L_1^B, K_n^N \quad ; \quad L_1^B, A$.

4. Soient X et Y les variables aléatoires qui associent à un événement élémentaire M son nombre $X(M)$ de cases blanches, et son nombre $Y(M)$ de cases noires. Soient S et D les variables aléatoires définies par $S(M) = X(M) + Y(M)$ et $D(M) = X(M) - Y(M)$.

1. Quelles sont les valeurs minimum et maximum de X, Y, S et D?
2. Quelles sont les espérances de X, Y, S et D ?