Mathématiques discrètes
DM Automne 2018

Durée : 3 heures
Documentation autorisée : deux feuilles A4 manuscrites
Appareils électroniques éteints et rangés

Cet énoncé comporte 3 exercices sur 3 pages.

Préliminaires : *Les 3 exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Il est donc vivement conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. Le sujet est long, le barème en tiendra compte. Il est bien entendu préférable de ne faire qu'une partie du sujet correctement plutôt que de tout bâcler.*
Dans cet examen, "graphe" signifie "graphe non orienté simple".

Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 : problème de ballotage

On considère un scrutin opposant deux candidats `A` et `B`, et à l'issue duquel `A` obtient α suffrages et `B` en obtient β, avec $\alpha < \beta$: `A` est donc élu. Le scrutin étant honnête, les bulletins identiques sont naturellement indifférenciables.
On s'intéresse au nombre de dépouillements *sans surprise*, c'est-à-dire ceux tout au long desquels, dès le premier bulletin, `A` a toujours eu strictement plus de voix que `B`. Les dépouillements qui ne vérifient pas cette propriété sont appelés *trompeurs*.
Par exemple, si $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, il y a trois dépouillements possibles : le dépouillement `A A B` est *sans surprise*, alors que les dépouillements `A B A` et `B A A` sont *trompeurs*.

1. Lister tous les dépouillements possibles pour $\alpha = 4$ et $\beta = 2$, en indiquant pour chacun s'il est *sans surprise* ou *trompeur*.
2. Quel est le nombre total de dépouillements différents possibles pour α et β fixés ?
3. Parmi ceux-ci, combien y a-t-il de dépouillements trompeurs commençant par `B` ?
4. Décrire une bijection entre dépouillements trompeurs commençant par `A` et dépouillements trompeurs commençant par `B`.
   (Indication : on pourra remarquer qu'un dépouillement est trompeur si et seulement si, à un certain stade, le nombre de `A` dépouillés est égal à celui de `B`, et considérer le premier moment où cela arrive)
5. En déduire le nombre total de dépouillements trompeurs, puis celui des dépouillements sans surprise. *(Vous devez obtenir* $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\binom{\alpha+\beta}{\alpha}$*.)*

Exercice 2 : lemme des mariages

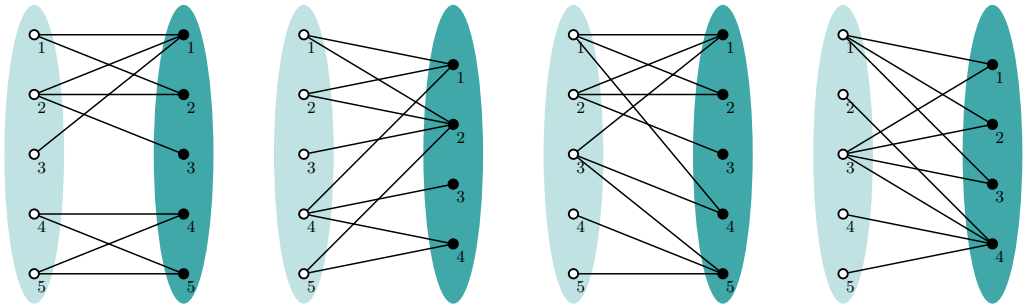
Un *couplage* dans un graphe $G = (S, A)$ est un sous-ensemble $C \subset A$ tel que deux arêtes quelconques de C n'ont pas de sommet en commun. C est dit *parfait pour un sous-ensemble* $X \subset S$ si tout sommet de X est extrémité d'une arête de C.

On s'intéresse maintenant uniquement à des graphes bipartis, sur les ensembles de sommets B (*blancs*) et N (*noirs*) : les seules arêtes sont de type $\{\circ, \bullet\}$ avec $\circ \in B$ et $\bullet \in N$.
Par exemple, on pourrait considérer que les sommets $\circ$ représentent des invités à asseoir et $\bullet$ représentent les chaises disponibles. Le graphe représente les affinités des invités pour les différentes places. Un couplage est alors une attribution possible de chaises à une partie des invités. Il est parfait pour un sous-ensemble X de chaises et d'invités si tous les invités de X ont une chaise attribuée et si toutes les chaises de X sont attribuées à un invité.

1. Pour chacun des graphes bipartis suivants, déterminer s'il existe un couplage

(a) parfait pour $B \cup N$, (b) parfait pour B, (c) parfait pour N.

Lorsque ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.
(*Indication : un même couplage peut éventuellement convenir pour les trois questions*)



G_1 G_2 G_3 G_4

Dans la suite, on considère un graphe biparti $G = (B \cup N, A)$, et pour tout $X \subset B$, on note $\mathcal{V}(X)$ l'ensemble des voisins des éléments de X.

2. Montrer que s'il existe un couplage parfait pour B dans G, alors pour tout $X \subset B$, le cardinal de $\mathcal{V}(X)$ est supérieur ou égal à celui de X :

$$|\mathcal{V}(X)| \geqslant |X|.$$

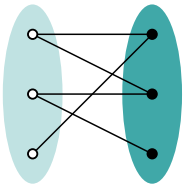
On souhaite montrer la propriété réciproque $(\mathcal{P})$:

> *Si pour tout $X \subset B$, le cardinal de $\mathcal{V}(X)$ est supérieur ou égal à celui de X, alors il existe un couplage parfait pour B dans G.*

Pour cela, on va raisonner par récurrence sur le nombre $n_\circ$ de sommets blancs.

3. Vérifier les cas $n_\circ = 1$ et $n_\circ = 2$.

Le cas $n_\circ \geqslant 3$ est plus compliqué, comme le montre l'exemple ci-contre.
Supposons que G vérifie l'hypothèse de $(\mathcal{P})$.



4. Que peut-on dire d'un éventuel coupage parfait pour B s'il existe un sommet $\circ \in B$ tel que $|\mathcal{V}(\circ)| = 1$?

5. Plus généralement, même question s'il existe $X \subset B$ tel que $|\mathcal{V}(X)| = |X|$.

6. Soit $\circ \in B$, et $\bullet \in N$ un de ses voisins dans G. Supposons que, pour tout $X \subset B \setminus \{\circ\}$ dont le voisinage $\mathcal{V}(X)$ contient $\bullet$, $|\mathcal{V}(X)| > |X|$.
Montrer que le sous-graphe de G induit par $(B \setminus \{\circ\}) \cup (N \setminus \{\bullet\})$ vérifie les hypothèses de $(\mathcal{P})$.

7. En déduire une démonstration de $(\mathcal{P})$ par récurrence sur $n_\circ$.

Exercice 3 : graphes tripartis

Une *tripartition* d'un graphe $G = (S, A)$ est une partition de S en trois ensembles ***disjoints et non vides*** $S_{\mathtt{b}}$ (les sommets bleus), $S_{\mathtt{r}}$ (les rouges) et $S_{\mathtt{v}}$ (les verts) telle que deux sommets adjacents ne sont pas de même couleur. Cette dernière condition s'exprime formellement comme suit :

$$\forall \{u, v\} \in A, \quad (u \in S_{\mathtt{b}} \implies v \notin S_{\mathtt{b}},\ u \in S_{\mathtt{r}} \implies v \notin S_{\mathtt{r}},\ u \in S_{\mathtt{v}} \implies \notin S_{\mathtt{v}})$$

Un graphe G est *triparti* s'il existe une tripartition de G.

1. Pour chacun des graphes suivants, déterminer s'il est triparti ou non (et justifier les réponses).
a. K_2 (*le graphe complet à 2 sommets*) **b.** K_3 **c.** K_4 **d.** C_4 (*le « carré »*)

2. Prouver que tout graphe biparti ayant au moins trois sommets est triparti.

Un graphe est *triangulé* si chacun de ses cycles de longueur au moins 4 possède une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux sommets non consécutifs du cycle.

3. Quels sont les graphes triangulés parmi ceux de la question 1 ?

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe triangulé soit biparti.

5. Montrer que le graphe triangulé de la figure 1 est triparti.

6. Donner un exemple de graphe triangulé non triparti.

Pour $b, r, v \in \mathbb{N}$, soit $K_{b,r,v}$ le graphe triparti *complet* à b sommets bleus, r sommets rouges et v sommets verts, c'est-à-dire celui où toute paire de sommets de couleurs distinctes est reliée par une arête.

7. Dessiner $K_{1,2,3}$ et $K_{2,2,2}$.

8. Combien d'arêtes $K_{b,r,v}$ possède-t-il, en fonction de b, r et v ?

9. Supposons $b \leqslant r \leqslant v$, avec $v - b \geqslant 2$. Montrer que $K_{b+1,r,v-1}$ possède strictement plus d'arêtes que $K_{b,r,v}$.

10. Montrer que pour tout entier n, le graphe triparti à $3n$ sommets possédant le plus d'arêtes est $K_{n,n,n}$. (*Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente*)

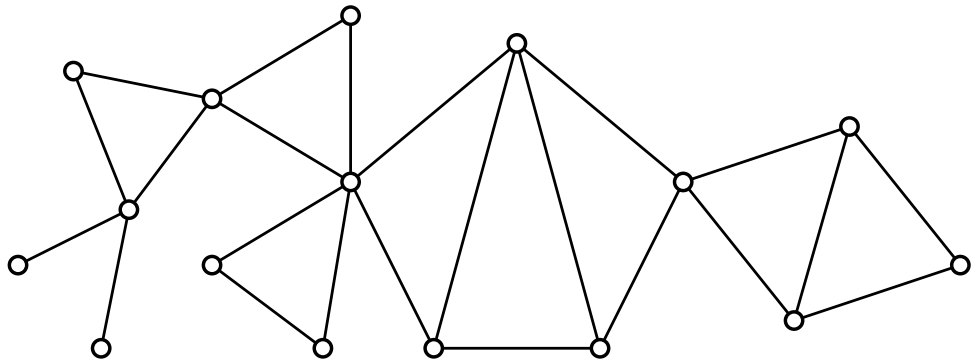


FIGURE 1 – Exercice 3, question 5