Mathématiques discrètes
Examen de 2e session – lundi 18 juin 2018

Durée : 3 heures
Documentation autorisée : deux feuilles A4 manuscrites
Appareils électroniques éteints et rangés

Cet énoncé comporte 5 exercices sur 3 pages.

Préliminaires : *Les 5 exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Il est donc vivement conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. Le sujet est long, le barème en tiendra compte. Il est bien entendu préférable de ne faire qu'une partie du sujet correctement plutôt que de tout bâcler.*

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Dans cet examen, « graphe » signifie « graphe non orienté simple ».

Exercice 1 : lancer de dés

Trois dés équilibrés, un noir, un blanc et un rouge, ayant chacun six faces numérotées de 1 à 6 sont lancés simultanément.

1. Donner l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ associé à cette expérience.

Soit A l'événement « *le résultat de chacun des trois lancers de dé est un nombre pair* », et B l'événement « *au moins un des trois résultats est le nombre 2* ».

2. Quelle est la probabilité de A ?

3. Quelle est la probabilité de B ?

4. Quelle est la probabilité de l'événement $A \cap B$?

5. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2 : suites graphiques

Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer s'il existe

(i) un graphe connexe (ii) un graphe non connexe (iii) un graphe biparti

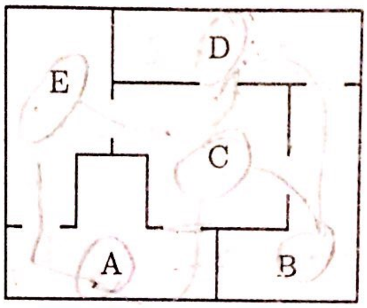
dont les sommets possèdent ces degrés.

1. $3, 2, 1, 1, 1, 1, 1$ **2.** $3, 3, 3, 2, 2, 2, 1$ **3.** $4, 4, 3, 3, 2, 2, 1$ **4.** $4, 4, 3, 3, 2, 1, 1$

Justifier toutes les réponses (positives et négatives).

Exercice 3 : nuit au musée

Un veilleur de nuit dispose d'une couchette placée dans la salle D sur le plan du musée représenté ci-dessous (sur lequel les portes sont représentées par des blancs dans les cloisons : —   —).



1. Lors de sa ronde, le veilleur de nuit doit visiter toutes les salles.
   a. Peut-il le faire sans passer deux fois par la même salle ? Non il ne peut pas.
   b. Peut-il le faire en revenant à sa couchette et sans passer deux fois dans les autres salles ? Non
   c. Proposer une modélisation du problème en termes de graphe. Comment s'appelle la propriété recherchée ?
   d. Proposer une autre disposition des portes permettant au veilleur de visiter toutes les salles une et une seule fois en revenant à sa couchette.
2. Une fois par nuit, il doit effectuer une ronde plus complète en traversant chaque porte. Il peut visiter plusieurs fois une même salle, mais tient à ne passer qu'une fois par chaque porte.
   a. Est-ce possible s'il veut revenir à sa couchette à la fin de sa ronde ? Oui
   b. Proposer une modélisation du problème en termes de graphe. Comment s'appelle la propriété recherchée ?
3. Des travaux sont prévus dans le musée : certaines portes vont être obstruées et de nouvelles portes vont être percées. Sachant qu'à la fin des travaux, au plus une porte pourra relier deux salles adjacentes, quelles sont les contraintes à respecter pour que le veilleur puisse visiter toutes les salles en traversant chacune des portes une et une seule fois avant de revenir à sa couchette ? Combien de plans de musée vérifiant cette contrainte l'architecte peut-il proposer ?

Exercice 4 : graphes tripartis

Une *tripartition* d'un graphe $G = (S, A)$ est une partition de S en trois ensembles ***disjoints et non vides*** S_b (les sommets bleus), S_r (les rouges) et S_v (les verts) telle que deux sommets adjacents ne sont pas de même couleur. Cette dernière condition s'exprime formellement comme suit :

$$\forall \{u, v\} \in A, \quad (u \in S_b \implies v \notin S_b,\ u \in S_r \implies v \notin S_r,\ u \in S_v \implies \notin S_v)$$

Un graphe G est *triparti* s'il existe une tripartition de G.

1. Pour chacun des graphes suivants, déterminer s'il est triparti ou non (et justifier les réponses).
   a. K_2 (*le graphe complet à 2 sommets*) b. K_3 c. K_4 d. C_4 (*le « carré »*)
2. Prouver que tout graphe biparti ayant au moins trois sommets est triparti.

Un graphe est *triangulé* si chacun de ses cycles de longueur au moins 4 possède une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux sommets non consécutifs du cycle.

3. Quels sont les graphes triangulés parmi ceux de la question 1 ?

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe triangulé soit biparti.

5. Montrer que le graphe triangulé de la figure 1 est triparti.

6. Donner un exemple de graphe triangulé non triparti.

7. Soit G un graphe hamiltonien, triangulé et triparti à n sommets. Montrer par récurrence sur n que la tripartition de G est unique à permutation près des couleurs (c'est-à-dire unique une fois les couleurs de deux sommets adjacents fixées).

Remarque : il est en fait possible de tester en temps linéaire si un graphe triangulé est triparti, alors que ce problème est NP-complet pour les graphes quelconques.

Pour $b, r, v \in \mathbb{N}$, soit $K_{b,r,v}$ le graphe triparti *complet* à b sommets bleus, r sommets rouges et v sommets verts, c'est-à-dire celui où toute paire de sommets de couleurs distinctes est reliée par une arête.

8. Dessiner $K_{1,2,3}$ et $K_{2,2,2}$.

9. Combien d'arêtes $K_{b,r,v}$ possède-t-il, en fonction de b, r et v ?

10. Supposons $b \leqslant r \leqslant v$, avec $v - b \geqslant 2$. Montrer que $K_{b+1,r,v-1}$ possède strictement plus d'arêtes que $K_{b,r,v}$.

11. Montrer que pour tout entier n, le graphe triparti à $3n$ sommets possédant le plus d'arêtes est $K_{n,n,n}$. (*Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente*)

Exercice 5 : codes détecteurs d'erreur

Roméo et Juliette souhaitent communiquer de manière discrète. Pour cela, ils se mettent d'accord sur le mode de communication suivant : leurs valets respectifs transporteront entre eux des boîtes avec n cases, chaque case pouvant contenir au plus k perles.

1. Combien de combinaisons différentes peuvent-ils effectuer en fonction de k et n ? Toutes les perles dont ils disposent sont identiques, et chaque case peut éventuellement être vide.

2. Quelle est la valeur minimale de n pour que Roméo et Juliette puissent se fixer un rendez-vous au cours du mois de juillet si $k = 1$? Et si $k = 2$?

Malheureusement, les valets ne sont pas toujours assez précautionneux et il arrive que le message original soit modifié. Pour détecter ces modifications, Roméo et Juliette se mettent d'accord sur l'usage de boîtes carrées de 4 cases par 4 cases (soit 16 en tout). La dernière colonne et la dernière ligne seront réservées à un codage de sûreté : la dernière case de chaque ligne (resp. colonne) contiendra autant de perles que le reste de la ligne (resp. colonne) modulo $k + 1$.

Pour toutes les questions qui suivent, seul ce type de boîte 4×4 ***sera considéré.***

3. Indiquer (en chiffres) le nombre de perles que devront contenir les cases grisées (cases du code de sûreté) pour les deux tableaux de la figure 2, établis respectivement pour $k = 1$ (à gauche) et $k = 2$ (à droite).

4. Même en fixant les cases de sécurité, le message reste toujours difficilement identifiable. Pour s'en convaincre, considérons ainsi une ligne dont la case de sûreté contienne c perles ($c \leqslant k$) : donner, en fonction de k, le nombre de lignes différentes correspondant à cette case.

5. S'il y a une unique case modifiée, le contenu de la case de sûreté de sa ligne et de sa colonne sera différent de la somme calculée par Roméo et celui-ci se rendra compte qu'il y a eu une modification et que le message a changé. Montrer que l'on peut toujours détecter lorsque exactement deux cases sont modifiées. Jusqu'à combien de cases modifiées Roméo sera-t-il sûr de détecter que le message a changé ?