université PARIS DIDEROT PARIS 7

# Mathématiques discrètes
# QCM n° 1

*Durée : 15 minutes*
*Énoncé constitué de 8 questions*

Nom :

Prénom :

Groupe :

**Question 1** Bob dispose de 30 nains de jardin tous différents. Il aimerait en disposer un à l'entrée du jardin, un devant la maison et un troisième au milieu de la pelouse. De combien de manières peut-il procéder ?

☐ $3!$ ☐ autre : ☐ $\binom{30}{3}$ ☐ $\binom{27}{3}$ ☐ $\frac{30!}{27!}$ ☐ $30^3$

**Question 2** Considérons la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) = \text{« Pour tout } n \geqslant 0,\ 2^n > n^2 \text{ ».}$$

Quelle partie de la démonstration suivante est fausse ?

(partie 1) Pour $n = 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie puisque $1 > 0$.
(partie 2) Soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie ; considérons alors $n + 1$.
(partie 3) On a $2^{n+1} = 2(2^n) > 2n^2$, par hypothèse de récurrence.
(partie 4) Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 0$, on a $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant n^2 + n^2 = 2n^2$
(partie 5) Donc, pour tout $n \geqslant 0$, $2^n > n^2$.
$\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

☐ aucune ☐ 4 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 5

**Question 3** Dans une récurrence double, sur combien d'éléments faut-il initialiser la récurrence au minimum pour que celle-ci soit valide ?

☐ 3 ☐ 2 ☐ tous ☐ 1 ☐ 0

**Question 4** Pour Halloween, 4 hommes et 6 femmes participent à un bal costumé. Les déguisements causent une belle pagaille... Au petit matin, 5 couples repartent. De combien de manières ces couples peuvent-ils être constitués ?

☐ $\frac{10!}{4!}$ ☐ autre : ☐ $\binom{10}{4}$ ☐ $6^4$ ☐ $10!$ ☐ $4^6$

**Question 5** Bob aimerait décorer sa vitrine pour Halloween en alignant les sept objets suivants : deux figurines de sorcières identiques, trois fantômes semblables et deux chats jumeaux. De combien de manières différentes pourra-t-il décorer sa vitrine ?

☐ $\frac{7!}{4!}$ ☐ autre : ☐ $\binom{7}{3}$ ☐ 12 ☐ $\frac{7!}{3!}$ ☐ $3^7$

**Question 6** Pour Halloween, Bob veut affubler ses 9 gentils nains de jardin (tous différents) d'un chapeau de sorcière. Il dispose de 15 chapeaux de couleurs différentes. De combien de manières peut-il procéder ?

☐ $15^9$ ☐ autre : ☐ $\frac{15!}{9!}$ ☐ $\binom{15}{9}$ ☐ $9^{15}$ ☐ $\frac{15!}{6!}$

**Question 7** Trente étudiants ont décidé de travailler en groupe leur UE de Mathématiques discrètes. Sachant que l'université met à leur disposition cinq salles de travail d'une capacité de trente élèves, combien y a-t-il de configurations différentes possibles ? (certains élèves peuvent préférer réfléchir seul dans une salle, et certaines salles peuvent rester inoccupées)

☐ $5^{30}$ ☐ autre : ☐ $30^5$ ☐ $\binom{30}{5}$ ☐ $\binom{34}{30}$ ☐ $\frac{30!}{25!}$

**Question 8** Considérons la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n) =$ « Les entiers $n$ et $n^2$ ont la même parité ».

La démonstration suivante est-elle valide ?

Pour $n = 1$, $n^2 = 1$ donc $n$ et $n^2$ ont la même parité. Soit $n \geqslant 1$, et supposons la propriété vraie au rang $n$. Alors $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ donc $(n+1)^2$ est impair (resp. pair) si $n^2$ est pair (resp. impair) et par hypothèse de récurrence, $n$ et $n^2$ ont la même parité donc $n+1$ et $(n+1)^2$ ont la même parité. Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

☐ non ☐ oui

**Question 9** Pour Halloween, Bob veut affubler ses 9 gentils nains de jardin (tous différents) d'un accessoire festif. Il dispose de 5 chapeaux de sorcière (identiques), 1 masque de zombie et 3 draps de fantômes. De combien de manières peut-il procéder ?

☐ $3^9$ ☐ $9^9$ ☐ autre : ☐ $\binom{9}{5}$ ☐ $\frac{9!}{6!}$ ☐ $\frac{9!}{4!}$

**Question 10** Dans une récurrence forte, sur combien d'éléments faut-il initialiser la récurrence au minimum pour que celle-ci soit valide ?

☐ 0 ☐ 3 ☐ tous ☐ 2 ☐ 1

**Question 11** L'université a décidé de repeindre les étages d'un bâtiment de 5 étages. Sachant que le fournisseur du marché public propose 8 couleurs différentes, de combien de façons les étages du bâtiment pourront-ils être repeints ?

☐ $\binom{8}{5}$ ☐ $5^8$ ☐ $\frac{8!}{5!}$ ☐ $8^5$ ☐ $\binom{13}{5}$ ☐ autre :

**Question 12** L'université a décidé de repeindre les étages d'un bâtiment de 5 étages. Sachant que le fournisseur du marché public propose 8 couleurs différentes, de combien de façons les étages du bâtiment pourront-ils être repeints sans que deux étages successifs soient de la même couleur ?

☐ $\frac{8!}{5!}$ ☐ $8^5$ ☐ $\binom{13}{5}$ ☐ $5^8$ ☐ autre : ☐ $\binom{8}{5}$

**Question 13** Pour Halloween, Bob dispose d'un bel alignement de 20 citrouilles similaires dans son jardin. Il aimerait en transformer 6 en Jack'o'lantern pour les mettre dans son salon. Combien a-t-il de manière de les choisir ?

☐ $20^6$ ☐ $\binom{25}{5}$ ☐ 6! ☐ $\frac{20!}{6!}$ ☐ $\binom{20}{6}$ ☐ autre :

**Question 14** Considérons la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n) =$ « L'entier $n$ s'écrit comme produit d'un nombre impair et d'une puissance de 2 ».

La démonstration suivante est-elle valide ?

L'entier 1 est impair. Soit $n \geqslant 1$, tel que tout entier $k$ entre 1 et $n$ vérifie $\mathcal{P}(k)$. Si $n+1$ est impair, il s'écrit comme $n+1 = 2^0 \times (n+1)$ donc la propriété est vérifiée. Si $n+1$ est pair, $\frac{n+1}{2}$ est compris entre 1 et $n$ donc, par hypothèse de récurrence, il existe deux entiers $k$ et $m$ tels que $\frac{n+1}{2} = 2^k \times (2m+1)$ d'où $n+1 = 2^{k+1} \times (2m+1)$ et, par principe de raisonnement par récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \geqslant 1$.

☐ non ☐ oui

**Question 15** Halloween arrivant, Bob prépare 50 bonbons à distribuer aux enfants qui viendront le voir. Sachant que 6 enfants passeront dans la soirée et que chaque enfant aura au moins un bonbon, combien Bob a-t-il de manières (pas nécessairement équitables) de distribuer les bonbons ?

- [ ] $50^6$
- [ ] $6!$
- [ ] autre :
- [ ] $\binom{49}{5}$
- [ ] $\binom{50}{6}$
- [ ] $\frac{44!}{6!}$

**Question 16** Considérons la propriété suivante :
$\mathcal{P}(n) =$ « Un rectangle de taille $2 \times n$ peut être pavé par des dominos de exactement $n$ manières différentes. ».
La démonstration suivante est-elle valide ?
Pour $n = 1$, le rectangle a une forme de domino donc peut être pavé par un domino. Pour $n = 2$, il y a deux manières de paver un carré de taille $2 \times 2$ : avec deux dominos horizontaux ou avec deux dominos verticaux. Soit $n \geqslant 1$, et supposons la propriété vraie au rang $n$. Considérons un rectangle de taille $2 \times n$. Alors le pavage peut être obtenu en disposant tout à droite du rectangle deux dominos horizontaux ou un domino vertical. Si l'on met deux dominos horizontaux, on peut alors compléter le pavage du rectangle avec des dominos horizontaux de droite à gauche, quitte à compléter par un domino vertical pour avoir la bonne parité. Cela donne 1 pavage possible. Si l'on met un domino vertical, il reste un rectangle de taille $2 \times n$ à paver : il y a $n$ façons de le faire par hypothèse de récurrence. Au total, il y a donc $n + 1$ façons de paver le rectangle. Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- [ ] oui
- [ ] non

**Question 17** Pour Halloween, 4 hommes et 6 femmes participent à un bal costumé. Les déguisements causent une belle pagaille... Au petit matin, 5 couples repartent. Si un seul de ces couples est homosexuel, de combien de manières ces couples peuvent-ils être constitués ?

- [ ] $\binom{10}{4}$
- [ ] $6^4$
- [ ] $4^6$
- [ ] autre :
- [ ] $\frac{10!}{4!}$
- [ ] $10!$

**Question 18** Considérons la propriété suivante :
$\mathcal{P}(n) =$ « Tout nombre premier inférieur ou égal à $n$ est impair ».
Quelle partie de la démonstration suivante est fausse ?
(partie 1) Pour $n = 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie puisque 1 n'est pas premier donc il n'y a pas de contradiction.
(partie 2) Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie ; considérons alors $n + 1$.
(partie 3) Si $n + 1$ n'est pas pair, alors soit il est premier et $\mathcal{P}(n + 1)$ est vérifiée, soit il ne l'est pas et il n'y a aucune contradiction.
(partie 4) Si $n + 1$ est pair, alors il est divisible par 2 donc il n'est pas premier.
$\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- [ ] 4
- [ ] 1
- [ ] aucune
- [ ] 3
- [ ] 2