Mathématiques discrètes
Examen du mardi 19 décembre 2017

Durée : 3 heures
Documentation autorisée : deux feuilles A4 manuscrites
Appareils électroniques éteints et rangés

Cet énoncé comporte 4 exercices sur 3 pages.

Préliminaires : *Les 4 exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Il est donc vivement conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. Le sujet est long, le barème en tiendra compte. Il est bien entendu préférable de ne faire qu'une partie du sujet correctement plutôt que de tout bâcler.*

Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 : suites graphiques

1. Soit G un graphe hamiltonien, et $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ la suite des degrés de ses sommets. Que peut-on dire de la suite $(d_1 - 2, d_2 - 2, \ldots, d_n - 2)$?

2. Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer s'il existe

(*i*) un graphe connexe	(*iii*) un graphe acyclique	(*v*) un graphe eulérien
(*ii*) un graphe non connexe	(*iv*) un graphe biparti	(*vi*) un graphe hamiltonien

dont les sommets possèdent ces degrés. Pour le cas des graphes bipartis, préciser toutes les manières de répartir les degrés entre sommets blancs et sommets noirs.

Justifiez vos réponses, sans hésiter à regrouper les justifications identiques !

a. $6, 3, 3, 2, 1, 1$
b. $5, 3, 3, 2, 1, 1$
c. $4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1$
d. $3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$
e. $5, 3, 2, 2, 2, 2$
f. $4, 3, 3, 2, 2, 2$
g. $4, 2, 2, 2, 2$
h. $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$

Scanned with CamScanner

Exercice 2 : lemme des mariages

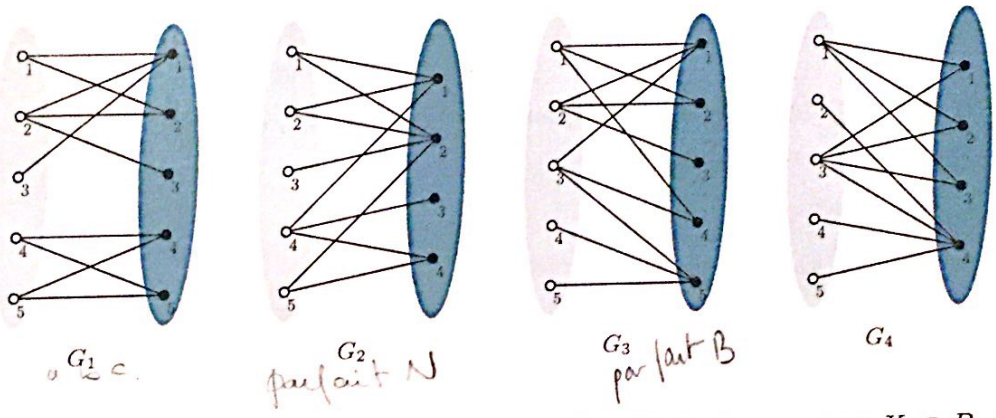
Un *couplage* dans un graphe $G = (S, A)$ est un sous-ensemble $C \subset A$ tel que deux arêtes quelconques de C n'ont pas de sommet en commun. C est dit *parfait pour un sous-ensemble* $X \subset S$ si tout sommet de X est extrémité d'une arête de C.

On s'intéresse maintenant uniquement à des graphes bipartis, sur les ensembles de sommets B (*blancs*) et N (*noirs*) : les seules arêtes sont de type $\{\circ, \bullet\}$ avec $\circ \in B$ et $\bullet \in N$.

1. Pour chacun des graphes bipartis suivants, déterminer s'il existe un couplage

   (*a*) parfait pour $B \cup N$, (*b*) parfait pour B, (*c*) parfait pour N.

   Lorsque ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.
   (*Indication : un même couplage peut éventuellement convenir pour les trois questions*)



Dans la suite, on considère un graphe biparti $G = (B \cup N, A)$, et pour tout $X \subset B$, on note $\mathcal{V}(X)$ l'ensemble des voisins des éléments de X.

2. Montrer que s'il existe un couplage parfait pour B dans G, alors pour tout $X \subset B$, le cardinal de $\mathcal{V}(X)$ est supérieur ou égal à celui de X :

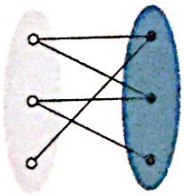
$$|\mathcal{V}(X)| \geqslant |X|.$$

On souhaite montrer la propriété réciproque $(\mathcal{P})$:

> *Si pour tout $X \subset B$, le cardinal de $\mathcal{V}(X)$ est supérieur ou égal à celui de X, alors il existe un couplage parfait pour B dans G.*

Pour cela, on va raisonner par récurrence sur le nombre $n_\circ$ de sommets blancs.

3. Vérifier les cas $n_\circ = 1$ et $n_\circ = 2$.



Le cas $n_\circ \geqslant 3$ est plus compliqué, comme le montre l'exemple ci-contre.
Supposons que G vérifie l'hypothèse de $(\mathcal{P})$.

4. Que peut-on dire d'un éventuel couplage parfait pour B s'il existe un sommet $\circ \in B$ tel que $|\mathcal{V}(\circ)| = 1$?

5. Plus généralement, même question s'il existe $X \subset B$ tel que $|\mathcal{V}(X)| = |X|$.

6. Soit $\circ \in B$, et $\bullet \in N$ un de ses voisins dans G. Supposons que, pour tout $X \subset B \setminus \{\circ\}$ dont le voisinage $\mathcal{V}(X)$ contient $\bullet$, $|\mathcal{V}(X)| > |X|$.
   Montrer que le sous-graphe de G induit par $(B \setminus \{\circ\}) \cup (N \setminus \{\bullet\})$ vérifie les hypothèses de $(\mathcal{P})$.

7. En déduire une démonstration de $(\mathcal{P})$ par récurrence sur $n_\circ$.

Scanned with CamScanner

Exercice 3 : problème de ballotage

On considère un scrutin opposant deux candidats A et B, et à l'issue duquel A obtient α suffrages et B en obtient β, avec $\alpha > \beta$: A est donc élu. Le scrutin étant honnête, les bulletins identiques sont naturellement indifférenciables.
On s'intéresse au nombre de dépouillements *sans surprise*, c'est-à-dire ceux tout au long desquels, dès le premier bulletin, A a toujours eu strictement plus de voix que B. Les dépouillements qui ne vérifient pas cette propriété sont appelés *trompeurs*.
Par exemple, si $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, il y a trois dépouillements possibles : le dépouillement A A B est *sans surprise*, alors que les dépouillements A B A et B A A sont *trompeurs*.

1. Lister tous les dépouillements possibles pour $\alpha = 4$ et $\beta = 2$, en indiquant pour chacun s'il est *sans surprise* ou *trompeur*.
2. Quel est le nombre total de dépouillements différents possibles pour α et β fixés ?
3. Parmi ceux-ci, combien y a-t-il de dépouillements trompeurs commençant par B ?
4. Décrire une bijection entre dépouillements trompeurs commençant par A et dépouillements trompeurs commençant par B.
   (Indication : on pourra remarquer qu'un dépouillement est trompeur si et seulement si, à un certain stade, le nombre de A dépouillés est égal à celui de B, et considérer le premier moment où cela arrive)
5. En déduire le nombre total de dépouillements trompeurs, puis celui des dépouillements sans surprise. *(Vous devez obtenir* $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\binom{\alpha+\beta}{\alpha}$*.)*

Exercice 4 : espaces probabilisés

On considère l'expérience suivante : on lance trois fois de suite une pièce de monnaie (équilibrée), chaque lancer donnant soit P (pile), soit F (face). On lance ensuite un dé (équilibré) à 6 faces numérotées de 1 à 6.

1. **a.** Décrire l'ensemble Ω des événements élémentaires associé à cette expérience.
   b. Quelle est le cardinal de Ω ? En déduire la probabilité de chaque événement élémentaire.

On considère maintenant le jeu de hasard dont les parties sont les séquences de trois lancers de pièce et un lancer de dé décrites ci-dessus, et dont l'issue est la suivante :

- si chaque lancer de pièce donne P, on gagne, en euros, la valeur indiquée par le dé ;
- sinon, si le lancer de dé donne une valeur paire, on perd un euro ;
- sinon, le jeu se termine sans gain ni perte.

2. Calculer la probabilité de l'événement $A =$ « *le premier lancer donne* P *et on perd 1 euro* ».
3. Les événements $B =$ « *le nombre de* P *est impair* » et $C =$ « *le nombre d'euros gagnés ou perdus est impair* » sont-ils indépendants ?
4. On considère la variable aléatoire G qui associe à chaque $\omega \in \Omega$ la somme gagnée si le jeu se déroule comme décrit par ω (une perte étant un gain négatif). Calculer l'espérance de G.

Soit J_n^m la version généralisée de ce jeu, dans laquelle on lance n fois la pièce, et le dé a $2m$ faces numerotées de 1 à $2m$ (vous avez traité jusqu'ici le cas particulier J_3^3).

5. Soit G_n^m la variable aléatoire associée au gain dans le jeu J_n^m. Calculer l'espérance de G_n^m.

Scanned with CamScanner