Mathématiques discrètes
Devoir n° 3 : graphes, degrés, connexité

Exercice 1 :

On souhaite montrer la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante, pour tout entier $n \geqslant 2$:

> *Il existe un graphe à n sommets tel que, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, un des n sommets a degré i — en particulier, exactement deux sommets ont même degré.*

1. Étant donné un graphe $G = (S, A)$, on définit le graphe $\bar{G} = (S, \bar{A})$ où :

$$\{u, v\} \in \bar{A} \iff \{u, v\} \notin A\,,$$

pour toute paire de sommets (distincts) $\{u, v\}$ de S. On note $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les degrés des n sommets de G. Quels sont les degrés des sommets du graphe $\bar{G}$?

2. Montrer $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n.

3. Existe-t-il également pour tout n un graphe à n sommets de degrés tous distincts ?

Exercice 2 :

Soit un graphe non orienté G dont les degrés sont tous au moins 2.

1. Montrer que chaque composante connexe de G contient au moins un cycle.

2. Montrer qu'il existe un graphe connexe possédant la même suite de degrés que G.

3. Est-ce également le cas si certains sommets ont degré 1 ?