Mathématiques discrètes
Devoir n° 3 (Corrections) : graphes, degrés, connexité

Exercice 1 :

On souhaite montrer la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante, pour tout entier $n \geqslant 2$:

> *Il existe un graphe à n sommets tel que, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, un des n sommets a degré i — en particulier, exactement deux sommets ont même degré.*

1. Étant donné un graphe $G = (S, A)$, on définit le graphe $\bar{G} = (S, \bar{A})$ où :

$$\{u, v\} \in \bar{A} \iff \{u, v\} \notin A\,,$$

pour toute paire de sommets (distincts) $\{u, v\}$ de S. On note $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les degrés des n sommets de G. Quels sont les degrés des sommets du graphe $\bar{G}$?

2. Montrer $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n.

3. Existe-t-il également pour tout n un graphe à n sommets de degrés tous distincts ?

Correction de l'exercice :

1. Considérons un sommet de G de degré d_i dans G. Ce sommet, comme sommet d'un graphe de n sommets, ne pourra pas avoir plus de $n-1$ voisins. De plus, dans $\bar{G}$, d_i de ces voisins lui sont interdits (ses voisins) dans G, et tous les autres doivent apparaître, par définition de $\bar{G}$. Un sommet de degré d_i dans G aura donc degré $n-1-d_i$ dans $\bar{G}$.
2. Montrons la propriété $\mathcal{P}_n$ par récurrence :
   - Initialisation : Pour $n = 2$, le graphe à deux sommets sans arêtes a un sommet de degré i pour tout i entre 0 et 0 et deux sommets de degré 0 : $\mathcal{P}_2$ est bien vérifiée.
   - Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un $n \geqslant 2$ et considérons un graphe de taille n G la vérifiant. Alors pour tout i entre 1 et $n-1$, il existe un sommet de degré i dans $\bar{G}$: celui qui était de degré $n-1-i$ dans G. De plus, deux sommets ont même degré (les deux mêmes que dans G). Ajoutant un sommet à G, on obtient un graphe G' sur $n+1$ sommets tel que pour tout i entre 0 et $n-1$, un des sommets a degré i et exactement deux sommets ont même degré : $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vérifiée.

   Par principe de raisonnement par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est alors vraie pour tout $n \geqslant 2$.
3. Les degrés d'un graphe à n sommets sont compris entre 0 et $n-1$. Un graphe aux degrés tous distincts aurait tous les degrés entre 0 et $n-1$. Soient alors A le sommet de degré 0 et B le sommet de degré $n-1$. B est alors relié aux $n-1$ autres sommets du graphe, donc à A, mais A est de degré 0 donc non relié à B : il faudrait que l'arête $\{A, B\}$ soit à la fois présente et non présente, ce qui est impossible donc un tel graphe n'existe pas, quelque soit $n \geqslant 2$.

Exercice 2 :

Soit un graphe non orienté G dont les degrés sont tous au moins 2.

1. Montrer que chaque composante connexe de G contient au moins un cycle.

2. Montrer qu'il existe un graphe connexe possédant la même suite de degrés que G.

3. Est-ce également le cas si certains sommets ont degré 1 ?

Correction de l'exercice :

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que le graphe G possède une composante connece acyclique. Cette composante connexe est alors un arbre. Or tous les sommets de G sont de degré au moins 2 : chaque composante connexe contient au moins 3 sommets. Cependant, un arbre sur au moins 3 sommets possède au moins deux feuilles (donc deux sommets de degré 1), ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse que tous les degrés des sommets de G sont au moins 2 : chaque composante connexe de G contient donc un cycle.
2. Raisonnons par récurrence sur le nombre de composantes connexes de G.
   - Initialisation : Si G a une composante connexe, il existe un graphe connexe possédant la même suite de degrés que G (G lui-même).
   - Hérédité : Supposons que, pour tout graphe non orienté dont les degrés sont tous au moins 2 à $k \geqslant 1$ composantes connexes, il existe un graphe connexe possédant la même suite de degrés. Considérons maintenant un graphe G à $k+1$ composantes connexes $C_1, \ldots, C_{k+1}$ dont les degrés sont tous au moins 2. Alors C_k et C_{k+1} possèdent tous les deux des cycles, d'après la question 1. Soient $\{a_k, b_k\}$ et $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ deux arêtes appartenant respectivement à un cycle de C_k et à un cycle de C_{k-1}. Comme ces arêtes appartiennent à des cycles, les supprimer ne déconnecte pas les composantes connexes. Considérons le graphe G' obtenu en supprimant $\{a_k, b_k\}$ et $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ et les remplaçant par $\{a_k, a_{k+1}\}$ et $\{b_k, b_{k+1}\}$. C_k et C_{k+1} ne forment alors plus qu'une composante connexe par l'ajout de ses arêtes. De plus, les degrés des sommets est conservé. G' a donc ses degrés supérieurs à 2, la même suite de degré que G et k composantes connexes : par hypothèse de récurrence, il existe un graphe connexe possédant la même suite de degrés que G' et donc que G.

   Par principe de raisonnement par récurrence, la propriété est donc vraie quelque soit le nombre de composantes connexes du graphe : il existe un graphe connexe possédant la même suite de degrés que G.
3. Si l'on autorise les sommets de degré 1, le graphe ayant pour suite de degré $(1, 1, 1, 1)$ est autorisé, hors il ne possède que 2 arêtes pour 4 sommets : aucun graphe connexe ne peut avoir cette suite de degré car il faut au minimum 3 arêtes à un tel graphe.