Mathématiques discrètes
Devoir n° 2 : graphes, chemins, degrés

Exercice 1 : graphes sans triangle (feuille n° 2, exercice 11)

Un *graphe sans triangle* est un graphe qui ne contient pas de cycle de longueur 3. On souhaite montrer la propriété suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$(\mathcal{P}_n)$ *Pour tout graphe sans triangle à n sommets et m arêtes, $m \leqslant \frac{n^2}{4}$.*

1. Pourquoi la « preuve » ci-dessous n'en est-elle pas une ?

« *On raisonne par récurrence sur n :*

- *si $n = 0$, le seul graphe à n sommets est le graphe vide, qui est sans triangle et a $0 \leqslant \frac{0^2}{4}$ arêtes, donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.*
- *soit $n \geqslant 0$ tel que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, et G un graphe sans triangle à n sommets. Considérons $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell)$ un chemin dans G. En reliant un nouveau sommet à $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \ldots$, on obtient un graphe G' sans triangle à $n+1$ sommets et (au plus) $\frac{n^2}{4} + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ arêtes. Or $\ell \leqslant n$, donc $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil \leqslant \frac{(n+1)}{2}$, donc G' a au plus $\frac{(n+1)^2}{4}$ arêtes. Donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.*

Donc $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. »

2. Montrer que tout graphe sans triangle à n sommets possède (au moins) un sommet de degré inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$.

3. En déduire par récurrence sur n que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 2 :

Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer s'il existe

(a) un graphe

(b) un graphe connexe

(c) un graphe non connexe

dont les sommets possèdent ces degrés. Justifier !

1. $4, 3, 3, 2, 1$

2. $5, 3, 3, 2, 1$

3. $3, 3, 1, 1, 1, 1$

4. $2, 2, 1, 1, 1, 1$

5. $4, 3, 3, 2, 2, 1, 1$

6. $5, 3, 3, 2, 2, 1$