U.E. Mathématiques Discrètes

Bérénice Delcroix-Oger (avec D. Poulalhon et A. Bucciarelli)

Université Paris Diderot

Semestre d'automne 2017

Plan de route

1. Un peu de dénombrement
2. Graphes et arbres
3. Probabilités discrètes

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à 4 disques ?

Règles :

- Un seul disque bouge à la fois
- Un disque ne peut pas être au-dessus d'un disque de plus petit diamètre

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

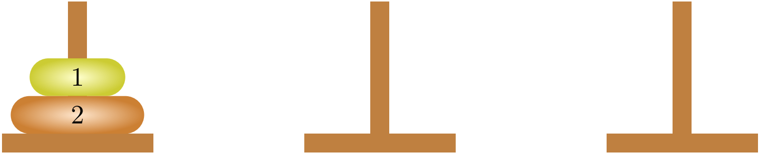
Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à ~~4~~ 3 disques ?

Règles :

- Un seul disque bouge à la fois
- Un disque ne peut pas être au-dessus d'un disque de plus petit diamètre

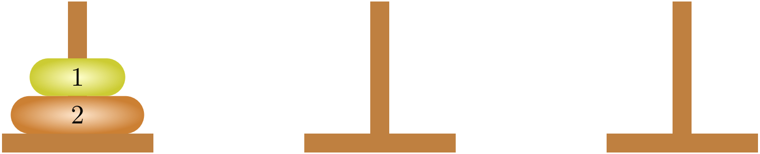
Raisonnement par récurrence : Récurrence simple



Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à ~~3~~ 2 disques ?

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple



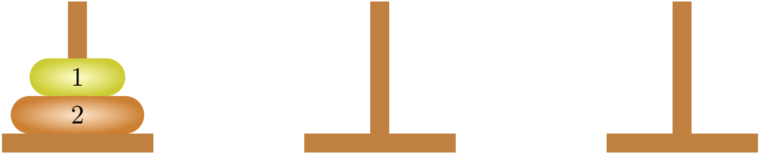
Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à ~~3~~ 2 disques ?

Réponse

3 !

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple



Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à ~~3~~ 2 disques ?

Réponse

$3\,!(=:a_2)$

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à 3 disques ?

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à 3 disques ?

Réponse

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 = 8 - 1$$

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à n disques ?

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

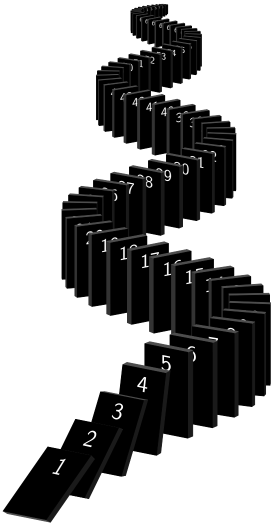
Question

En combien de mouvements au minimum est-il possible de résoudre le problème de la tour de Hanoï (amener tous les disques sur le poteau de droite) à n disques ?

Réponse

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2^n - 1$$

Raisonnement par récurrence : Récurrence simple



Raisonnement par récurrence : Récurrence simple

Soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété à prouver pour tout entier $n \geq n_0$.

Deux étapes :

- Initialisation
- Hérédité

- Initialisation : Montrer $\mathcal{P}(n_0)$
- Hérédité : Supposant $\mathcal{P}(k)$ pour $k \geq n_0$, montrer $\mathcal{P}(k+1)$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$

Raisonnement par récurrence : Récurrence double

Question

Alice et Bob ont une allée de 2 mètres de large par n de long : Combien y a-t-il de manière de la paver avec des pierres de 1m $\times$ 2m ?

Clé :

Faire une récurrence double !

Raisonnement par récurrence : Récurrence double

Question

Alice et Bob ont une allée de 2 mètres de large par n de long : Combien y a-t-il de manière de la paver avec des pierres de 1m $\times$ 2 m ?

Posons d'abord la première pierre (la plus à gauche) : combien y a-t-il de manière de procéder ? Comment paver le reste ?

Raisonnement par récurrence : Récurrence double

Question

Alice et Bob ont une allée de 2 mètres de large par n de long : Combien y a-t-il de manière de la paver avec des pierres de 1m $\times$ 2 m ?

Posons d'abord la première pierre (la plus à gauche) : combien y a-t-il de manière de procéder ? Comment paver le reste ?

$$m_n = m_{n-1} + m_{n-2} \text{ (Suite de Fibonacci)}$$

Raisonnement par récurrence : Récurrence double

Soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété à prouver pour tout entier $n \geq n_0$.

Deux étapes :

- Initialisation (double !)
- Hérédité

- Initialisation : Montrer $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$
- Hérédité : Supposant $\mathcal{P}(k+1)$ et $\mathcal{P}(k)$ pour $k \geq n_0$, montrer $\mathcal{P}(k+2)$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$

Raisonnement par récurrence : Récurrence forte

Soit $\mathcal{P}(n)$, la propriété à prouver pour tout entier $n \geq n_0$.

Deux étapes :

- Initialisation
- Hérédité (forte !)

- Initialisation : Montrer $\mathcal{P}(n_0)$
- Hérédité : Supposant $\mathcal{P}(k-1), \mathcal{P}(k-2), \ldots, \mathcal{P}(n_0)$ pour $k \geq n_0$, montrer $\mathcal{P}(k)$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$

Exemple

- Algorithme de tri
- Mq tout entier $n > 0$ admet une expression binaire (càd qu'il existe $c_i \in \{0; 1\}$ tq $n = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \ldots + c_0 2^0$)

À vous !

Exercice(s)

Exercices 1 à 3 de la feuille de TD1

Qu'est-ce qu'un ensemble ?

- ```
  Set<Integer> unEnsemble = new HashSet<>();
  unEnsemble.add(2017);
  unEnsemble.add(1);
  unEnsemble.add(3);
  unEnsemble.add(42);
  ```
- ```
  unEnsemble=Set([2017,"tintinnabuler", 3, "combinatoire"])
  ```

Définition

Un ensemble est une collection (= regroupement) *non ordonnée* d'objets *sans répétitions*. Un objet de l'ensemble est appelé un élément de l'ensemble, on dit alors qu'il lui appartient.

Qu'est-ce qu'un ensemble ?

Définition

Un ensemble est une collection (= regroupement) *non ordonnée* d'objets (sans répétition). Un objet de l'ensemble est appelé un élément de l'ensemble, on dit alors qu'il lui appartient. Un multiensemble est une collection d'objets avec répétitions éventuelles.

Si un objet x appartient à un ensemble E, on note $x \in E$.
Sinon, on note $x \notin E$.
Un ensemble sera noté entre accolades $\{\ \}$.

Exemple

Sauriez-vous donner des exemples et des contre-exemples d'ensemble ?

Attention

Nous ne considérerons ici que des ensembles finis.

Opérations sur les ensembles

Considérons les ensembles $A = \{x_1, \ldots, x_n\} (= \{x_3, x_n, x_1, \ldots, x_2\})$ et $B = \{y_1, \ldots, y_k\}$:

Définition

$\cup$ (Union) : $A \cup B =$	$\{z \| (\exists 1 \leq j \leq k : z = y_j)$ or $(\exists 1 \leq i \leq n : z = x_i)\}$
$\cap$ (Intersection) :	$A \cap B = \{z \| \exists 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k : z = y_j = x_i\}$
$\bar{\ }$ (Complémentaire) :	Dans A, $\bar{S} = \{x \in A \| x \notin S\} (= A \setminus S = T)$
$\subseteq$ (Sous-ensemble) :	$S \subseteq A$ ssi $\{\exists T : S \cup T = A, S \cap T = \emptyset\}$
$\times$ (Produit cartésien) :	$A \times B = \{(x, y) \| x \in A$ et $y \in B\}$

Opérations sur les ensembles

Considérons les ensembles $A = \{x_1, \ldots, x_n\} (= \{x_3, x_n, x_1, \ldots, x_2\})$ et $B = \{y_1, \ldots, y_k\}$:

Définition

$\cup$ (Union) : $A \cup B = \{z | (\exists 1 \leq j \leq k : z = y_j) \text{ or } (\exists 1 \leq i \leq n : z = x_i)\}$

$\cap$ (Intersection) : $A \cap B = \{z | \exists 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k : z = y_j = x_i\}$

$\bar{}$ (Complémentaire) : Dans A, $\bar{S} = \{x \in A | x \notin S\} (= A \setminus S = T)$

$\subseteq$ (Sous-ensemble) : $S \subseteq A$ ssi $\{\exists T : S \cup T = A, S \cap T = \emptyset\}$

Question

Quels sont les analogues des opérations ci-dessus en calcul propositionnel ?

Définition

$\times$ (Produit cartésien) : $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ et } y \in B\}$

Combien d'éléments dans un ensemble ?

```
unEnsemble.length()
unEnsemble.len()
unEnsemble.size()
```

Définition

Le cardinal d'un ensemble E est son nombre d'éléments.

Le cardinal d'un ensemble E est noté $|E|$.

Proposition

Soient A et B deux ensembles,

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$
- $|A \times B| = |A| \times |B|$
- *Si* $S \subseteq A$, $|S| \leq |A|$
- $|\bar{S}| = |A| - |S|$

Applications

Principe de multiplication

Si un objet consiste en k éléments différents et qu'il y a α_i versions de l'élément i, alors il y a $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ objets différents possibles.

Exemple

Un restaurant sert 3 entrées différentes, 6 plats principaux et 4 desserts : combien de repas complet (entrée/plat/dessert) différents peut-on y manger ?

Applications

Principe d'addition

Si $E_1, \ldots, E_k$ sont deux à deux disjoints ($E_i \cap E_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$), on note $\sqcup$ l'union disjointe de ces éléments et on a :

$$|E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k| = |E_1| + \ldots + |E_k|$$

Exemple

Un restaurant sert 4 plats de viande, 2 plats de poisson et 3 plats végétariens différents : combien de plats différents peut-on y manger ?

Exemple

Un restaurant sert 3 entrées différentes, 6 plats principaux et 4 desserts : combien de repas entrée/plat ou plat/dessert différents peut-on y manger ?

À vous !

Exercice(s)

Exercices 4 à 6 de la feuille de TD1

Applications

Définition

Soient E et F deux ensembles. Une application de E dans F est une partie f de $E \times F$ telle que pour tout $x \in E$ il existe un unique y tel que $(x, y) \in f$. On note alors $f(x) = y$.

Proposition

Le nombre d'applications d'un ensemble E dans un ensemble F est :

$$\mathcal{F}(E, F) = |F|^{|E|}.$$

Bijections

Définition

L'application f est dite :

- injective si $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$,
- surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$,
- bijective si elle est injective et surjective (pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$).

On parle alors respectivement d'injection, de surjection et de bijection.

Proposition

Si deux ensembles sont en bijection, ils ont même cardinal.

C'est ce que l'on fait dès que l'on numérote des objets !

Permutations et factorielles

Définition

Une permutation d'un ensemble E est une application bijective de E dans E.

Proposition

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est donné par la factorielle

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \ldots \times \ \textit{avec } 0! = 1.$$

Exemple

Alice range ses cours de L3 pour pouvoir les relire facilement. Sachant qu'elle a 6 modules différents ce semestre, de combien de manières différentes pourra-t-elle attribuer les intercalaires de son classeur ?

Arrangements

Définition

Un *k-arrangement* d'un ensemble E est une liste de k objets différents de E. C'est une injection de $[\![1;k]\!] := \{1, 2, \ldots, k-1, k\}$ dans E.

Remarque : Un $|E|$-arrangement est une permutation.

Proposition

Le nombre de k-arrangements d'un ensemble E est donné par une factorielle descendante :

$$(n)_k = \prod_{i=1}^{k} (n - i + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple

Le comité olympique décide, en première sélection, de classer quatre dossiers parmi les vingt dossiers de candidature déposés : combien de classements différents pourrait-il faire ?

Sous-ensembles et combinaison

Définition

Une *k-combinaison* d'un ensemble E est un ss-ensemble de E de cardinal k.

Rque : Si l'on ordonne une k-combinaison, on obtient un k-arrangement.

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de sous-ensemble de E de cardinal k est donné par le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k \text{ éléments}}}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Exemple

Pour jouer au loto, il faut cocher 5 numéros sur une grille de 49 nombres puis choisir un numéro chance parmi dix : combien de tickets de loto différents est-il possible de remplir ?

Propriétés des coefficients binomiaux

Théorème

Formule du binôme de Newton Soit n un entier naturel, x et y deux nombres réels, alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Proposition

Les coefficients binomiaux vérifient :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ et } \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Combinaisons avec répétition

Définition

Une k-combinaison avec répétition d'un ensemble E est un multi-ensemble de k éléments de E (ensemble dans lequel les répétitions sont autorisées).

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de k-combinaison de E est donnée par

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Exemple

Bob range son armoire dans laquelle il a dix paires de chaussettes toutes identiques et cinq tiroirs : combien de manières différentes a-t-il de ranger ses affaires ?

Permutations avec répétition

Définition

Une permutation avec répétition d'un ensemble E est un découpage de E en r sous-ensembles de tailles $n_1, n_2, \ldots, n_r$, tels que $n_1 + \ldots + n_r = n$.

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de permutations avec répétition de E en r sous-ensembles de tailles $n_1, \ldots, n_r$ est donné par

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}.$$

Exemple

Combien le mot "PRESTIDIGITATEUR" a-t-il d'anagrammes ?

Tableau récapitulatif

Soit E un ensemble de cardinal n et F un ensemble de cardinal k.

		Ordonné	
		Oui	Non
Répétition	Oui	fonctions de F dans E n^k	k-combinaisons avec rép. $\binom{n+k-1}{k}$
	Non	k-arrangement $\frac{n!}{(n-k)!}$	k-combinaison $\binom{n}{k}$

Un peu de pratique

Exercice(s)

Relier le tableau ci-dessus et l'exercice 4 de la feuille de TD 1

Exercice(s)

Exercices 8 à 9 de la feuille de TD 1

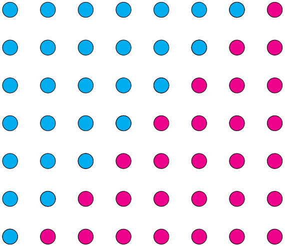
Principe de double-comptage

Le double-comptage consiste à compter de deux manières différentes un certain ensemble. De manière équivalente, il revient à donner une bijection entre deux ensembles qui ont alors le même cardinal.

Exemples

- Preuve du nombre de k-combinaison (équivalence entre k-combinaison ordonnée et k-arrangement).
- Preuve de la formule du binôme de Newton (équivalence entre la donnée d'une fonction de $\{1,\ldots,n\} \to \{0,1\}$ et la donnée d'un sous-ensemble de $\{1,\ldots,n\}$ correspondant à $\{x \in \{1,\ldots,n\} | f(x) = 1\}$).

Illustration du principe de double-comptage



Comptons les points magenta :

- Il y a en tout 7×8 points (ici, n=7). Comme il y a autant de points magenta que cyan, il y a donc 28 points magenta.
- Comptons les par ligne : il y en a 1 sur la 1ère ligne, 2 sur la 2ème, ..., 7 sur la 7ème soit $1+2+3+4+5+6+7$ points magenta.

On a alors $7 \times 8 = 1+2+3+4+5+6+7$.

Illustration du principe de double-comptage

Proposition

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Démonstration.

Considérons un rectangle de n lignes et $n+1$ colonnes avec i points magenta sur la $i$ème ligne et les autres cyan. Comptons les points magenta :

- Il y a en tout $n \times (n-1)$ points. Comme il y a autant de points magenta que cyan, il y a donc $\frac{n(n-1)}{2}$ points magenta.
- Comptons les par ligne : il y en a 1 sur la 1ère ligne, ..., n sur la $n$ième soit $\sum_{i=1}^{n} i$ points magenta.

En comptant de deux manières différentes les points magenta, on obtient $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$. □

Un autre exemple

Proposition (Formule du triangle de Pascal)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration.

Soit S_k^n l'ensemble des sous-ensembles de taille k de $\{1,\ldots,n\}$. Considérons un élément s de S_k^n . Il y a $\binom{n}{k}$ manière de choisir un tel ensemble. $*$
De plus, ou bien n appartient au sous-ensemble choisi ou bien n n'y appartient pas : on peut alors appliquer le principe d'addition.
Comptons les éléments de S_k^n contenant n : il faut choisir les $k-1$ autres éléments de l'ensemble et on a $\binom{n-1}{k-1}$ façons de le faire. $*$
Comptons maintenant les éléments de S_k^n ne contenant pas n : ce sont alors des sous-ensembles de $\{1,\ldots,n-1\}$ et réciproquement tout sous-ensemble de $\{1,\ldots,n-1\}$ est un sous-ensemble de $\{1,\ldots,n\}$. $*$
On a alors $|S_k^n| =^* \binom{n}{k} =^* \binom{n-1}{k} +^* \binom{n-1}{k-1}$. $\square$

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercice 7 de la feuille de TD 1

Principe d'inclusion-exclusion

Rappel

Soient A et B deux ensembles.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exemple

Dans une classe de 50, il y a 30 filles et 35 étudiants bruns : montrer qu'il y a au moins 15 filles brunes.

Principe d'inclusion-exclusion

Théorème

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles. Le nombre d'éléments de $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ qui ont au moins une de ces propriétés est donné par :

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}|$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

Pour aller plus loin

Exercice(s)

Exercices 10 à 12 de la feuille de TD 1

Question

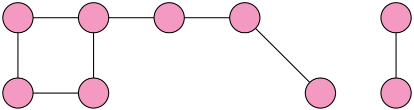
Un touriste souhaite prendre en photo toutes les stations de métro du 1er arrondissement de Paris en ne passant qu'une et une seule fois par chaque station (pour perdre le moins de temps possible) : est-ce possible ?

Graphes

Définition

Un graphe non orienté est une paire (V, E) où

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
- E est un ensemble de paires de sommets distincts, appelées arêtes.

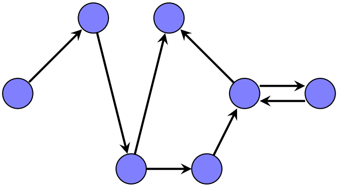


Graphes

Définition

Un graphe orienté est une paire (V, E) où

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
- E est un ensemble de couples de sommets distincts, appelées arêtes.

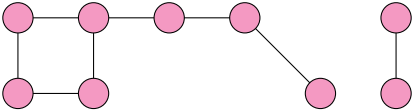


Graphes

Définition

Un graphe non orienté est une paire (V, E) où

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
- E est un ensemble de paires de sommets distincts, appelées arêtes.

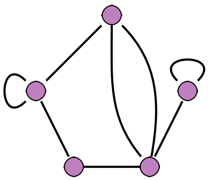


Graphes

Définition

Un multigraphe est une paire (V, E) où

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
- E est un multiensemble de paires de sommets distincts, appelées arêtes.

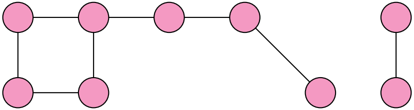


Graphes

Définition

Un graphe non orienté est une paire (V, E) où

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
- E est un ensemble de paires de sommets distincts, appelées arêtes.



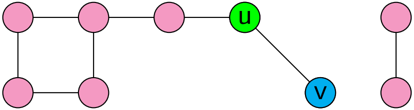
Graphes

Définition

Un graphe non orienté est une paire (V, E) où

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets
- E est un ensemble de paires de sommets distincts, appelées arêtes.

Soit G un graphe. Si $\{u, v\}$ est une arête de G, alors les sommets u et v sont dits adjacents. On dit aussi que u est un voisin de v (ou que v est un voisin de u).



Un peu de pratique

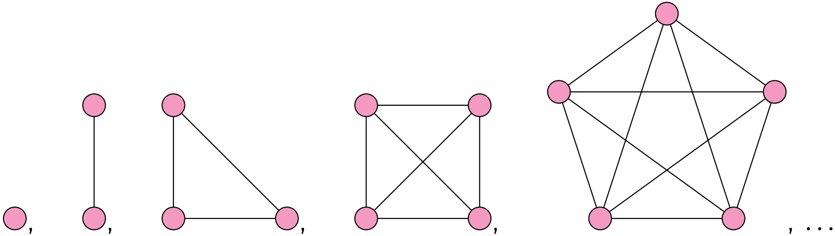
Exercice(s)

Exercices 1 et 2 de la feuille de TD 2

Graphe complet

Définition

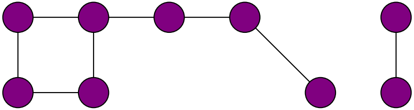
Un graphe est complet si toute paire de sommets distincts est une arête.



Degré

Définition

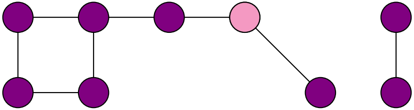
Le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes contenant v.



Degré

Définition

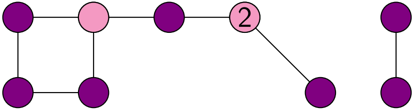
Le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes contenant v.



Degré

Définition

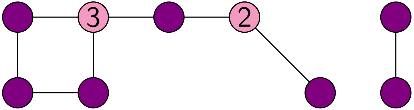
Le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes contenant v.



Degré

Définition

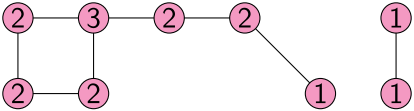
Le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes contenant v.



Degré

Définition

Le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes contenant v.



Degré

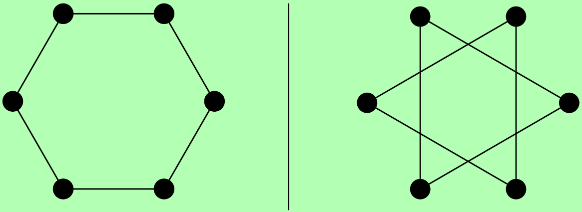
Définition

Le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes contenant v.

Attention

Une distribution de degré ne permet pas de caractériser le graphe.

Exemple



Degré

Le degré des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ vérifie les propriétés suivantes :

Proposition

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Corollaire (Lemme des poignées de main)

Tout graphe (non orienté fini) a un nombre pair de sommets de degré impair.

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercices 6 et 7 de la feuille de TD 2

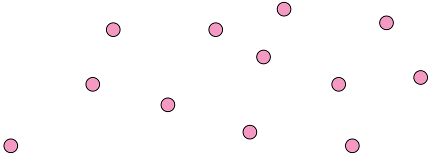
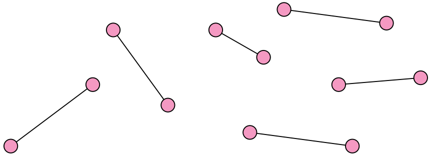
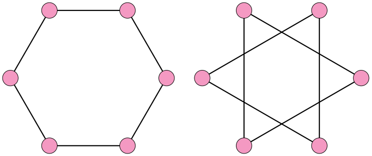
Graphe n-régulier

Définition

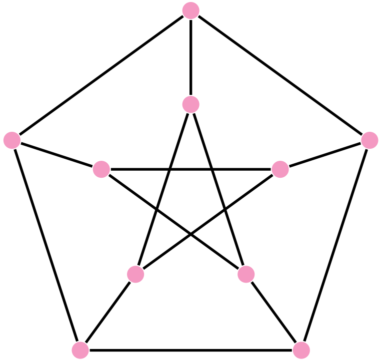
Un graphe n-régulier est un graphe dont tous les sommets sont de degré n.

Définition

Un graphe *n-régulier* est un graphe dont tous les sommets sont de degré n.

n=0	
n=1	
n=2	

Graphe de Petersen



Un peu de pratique

Exercice(s)

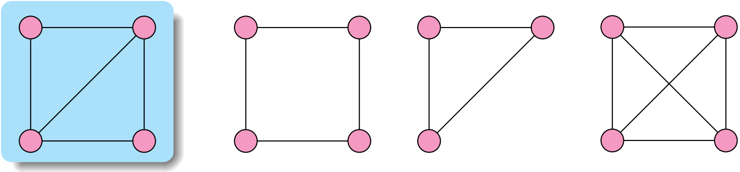
Exercices 3, 4 et 8 de la feuille de TD 2

Sous-graphes

Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes.

Définition

On dit que G est un sous-graphe de G' si $V \subseteq V'$ et $E \subseteq E'$. On dit que G est un sous-graphe induit de G' si de plus toute arête e de E entre deux sommets de V' est dans E'.

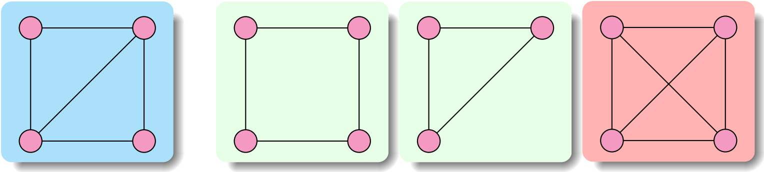


Sous-graphes

Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes.

Définition

On dit que G est un sous-graphe de G' si $V \subseteq V'$ et $E \subseteq E'$. On dit que G est un sous-graphe induit de G' si de plus toute arête e de E entre deux sommets de V' est dans E'.



Marches et chemins

Définition

Une marche (walk) sur un graphe $G = (V, E)$ est une liste de sommets et d'arêtes

$$(v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_t)$$

où $v_i \in V$, $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$.

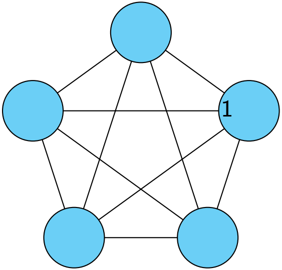
t est alors la longueur de la marche. Un marche simple (path) est une marche dont toutes les arêtes sont distinctes.

Un marche élémentaire (ou chemin) est une marche dont tous les sommets sont distincts.

Un cycle est une marche qui revient à son point de départ ($v_t = v_0$), et telle que $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{t-1})$ soit un chemin.

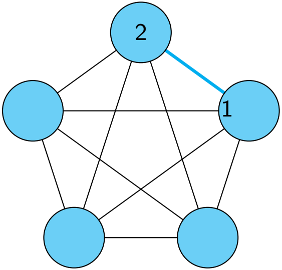
Marches et chemins

Marche



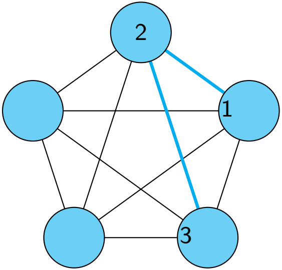
Marches et chemins

Marche



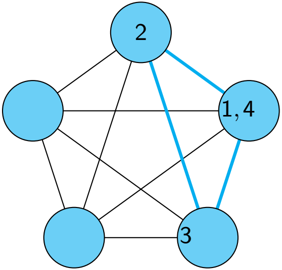
Marches et chemins

Marche



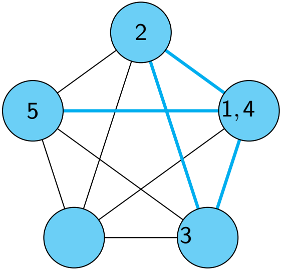
Marches et chemins

Marche



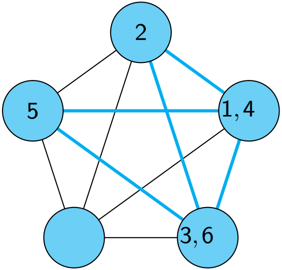
Marches et chemins

Marche



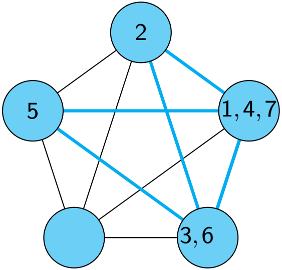
Marches et chemins

Marche



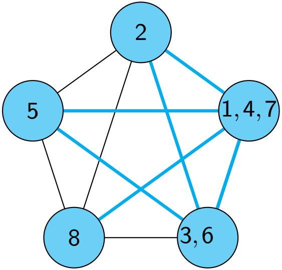
Marches et chemins

Marche



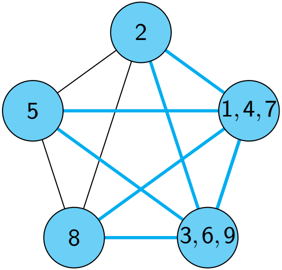
Marches et chemins

Marche



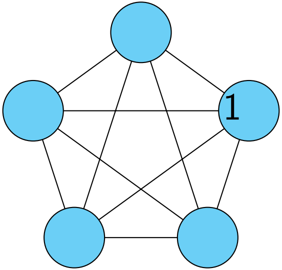
Marches et chemins

Marche



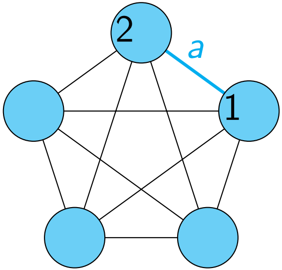
Marches et chemins

Marche simple



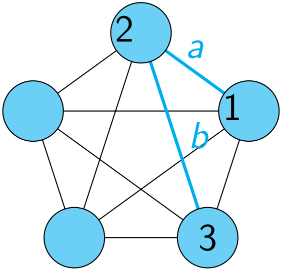
Marches et chemins

Marche simple



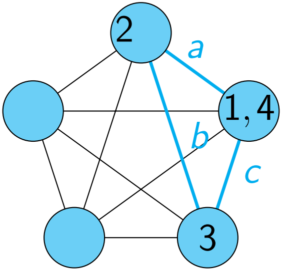
Marches et chemins

Marche simple



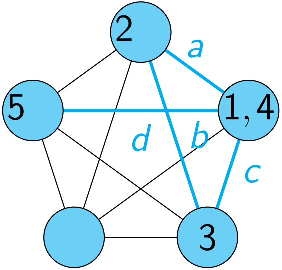
Marches et chemins

Marche simple



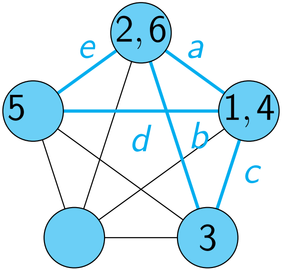
Marches et chemins

Marche simple



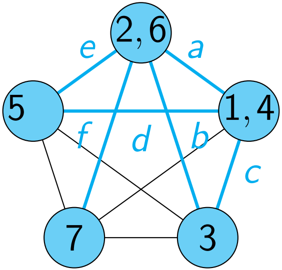
Marches et chemins

Marche simple



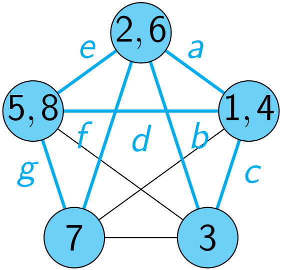
Marches et chemins

Marche simple



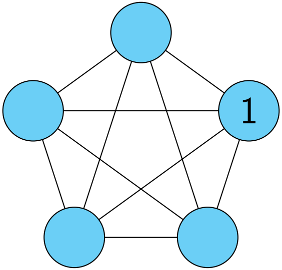
Marches et chemins

Marche simple



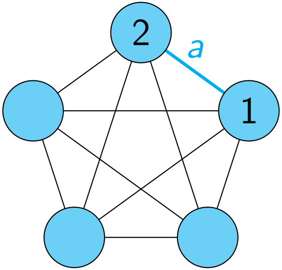
Marches et chemins

Marche élémentaire



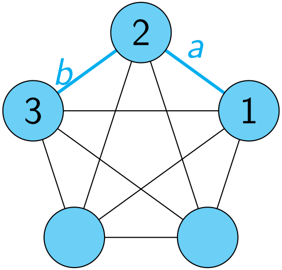
Marches et chemins

Marche élémentaire



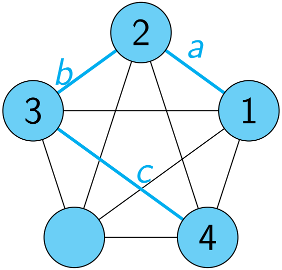
Marches et chemins

Marche élémentaire



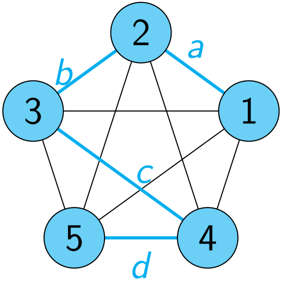
Marches et chemins

Marche élémentaire



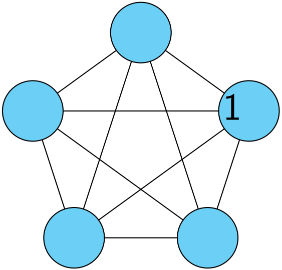
Marches et chemins

Marche élémentaire



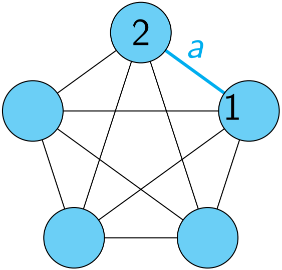
Marches et chemins

Cycles



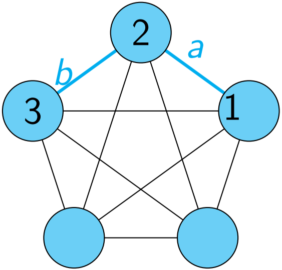
Marches et chemins

Cycles



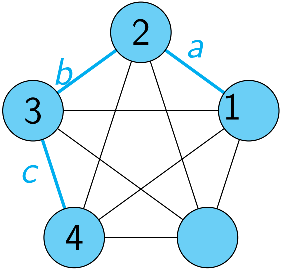
Marches et chemins

Cycles



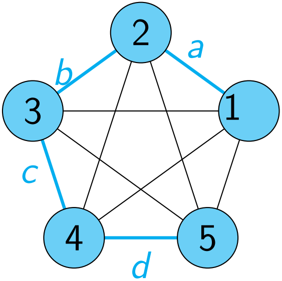
Marches et chemins

Cycles



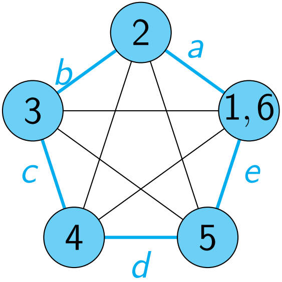
Marches et chemins

Cycles



Marches et chemins

Cycles

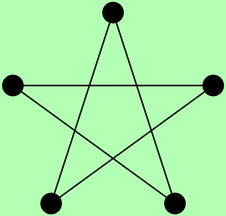


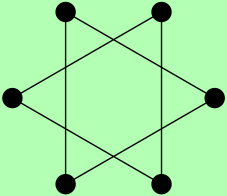
Connexité

Définition

Un graphe est connexe si pour tous sommets $x, y \in V(G)$, il existe une marche de x à y. Dans ce cas, il existe aussi un chemin (marche élémentaire) de x à y.

Exemples



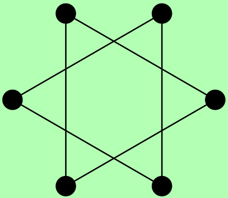


Composante connexe

Définition

Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe connexe maximal.

Exemple

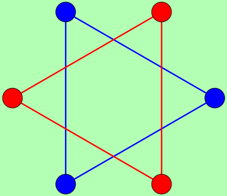


Composante connexe

Définition

Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe connexe maximal.

Exemple

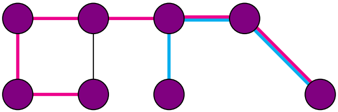


Maximalité et longueur

Considérons un graphe $G = (V, E)$.

Définition

Un chemin maximal de G est un chemin $(v_0, e_1, \dots, e_n, v_n)$ qui ne peut pas être prolongé en un chemin $(v_0, \dots, v_n, e_{n+1}, v_{n+1})$, càd qu'il n'existe pas d'arêtes e_{n+1} et de sommet v_{n+1} tel que la marche $(v_0, \dots, v_n, e_{n+1}, v_{n+1})$ soit un chemin. (-)
Un chemin de longueur maximale est un chemin $(v_0, e_1, \dots, e_n, v_n)$ tel qu'il n'existe aucun chemin $(v'_0, e'_1, \dots, e'_n, v'_n, e'_{n+1}, v'_{n+1})$. Un chemin de longueur maximal est notamment un chemin maximal. (-)



Distance et diamètre

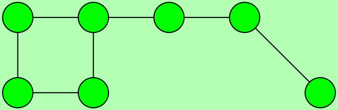
Définition

La distance entre deux sommets v et v' dans le graphe G $d_G(v,v')$ est la longueur minimale d'un chemin les reliant (ou $+\infty$ s'il n'existe pas de chemin entre ces sommets).

Le diamètre d'un graphe est la plus longue des distances entre deux sommets du graphe.

$$d(G) = \max_{x,y \in V(G)} d_G(x,y)$$

Exemple



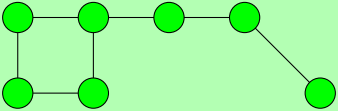
Distance et diamètre

Définition

La distance entre deux sommets v et v' dans le graphe G $d_G(v, v')$ est la longueur minimale d'un chemin les reliant (ou $+\infty$ s'il n'existe pas de chemin entre ces sommets).
Le diamètre d'un graphe est la plus longue des distances entre deux sommets du graphe.

$$d(G) = \max_{x,y \in V(G)} d_G(x, y)$$

Exemple



Le diamètre de ce graphe est 5.

Diamètre

Question

Quels sont les graphes de diamètre 1 ?

Acyclicité

Définition

Un graphe est acyclique s'il n'existe aucun cycle dans le graphe

Proposition

Un graphe G est acyclique si pour tous sommets u et v de G, il existe au plus une marche entre u et v. Dans ce cas, cette marche est en fait un chemin.

Acyclicité

Définition

Un graphe est acyclique s'il n'existe aucun cycle dans le graphe

Proposition

Un graphe G est acyclique si pour tous sommets u et v de G, il existe au plus une marche entre u et v. Dans ce cas, cette marche est en fait un chemin.

Question

Qu'est-ce qu'un graphe qui est à la fois acyclique et connexe ?

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercices 5 et 9 à 12 de la feuille de TD 2

Graphes bipartis

Définition

Un graphe biparti est un graphe non orienté (V, E) où

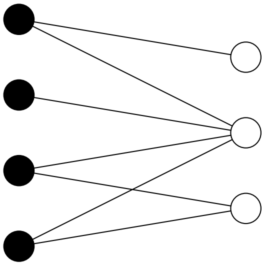
- l'ensemble des sommets V se scinde en deux sous-ensembles distincts $V = V_b \sqcup V_n$, les éléments de V_b sont les sommets blancs et ceux de V_n sont les sommets noirs,
- toute arête de E a un élément dans V_b et un élément dans V_n. E est donc un ensemble de paires d'un sommet de V_b et d'un sommet de V_n.

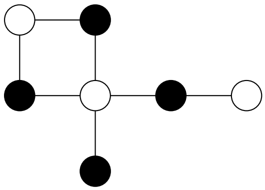
Graphes bipartis

Définition

Un graphe biparti est un graphe non orienté (V, E) où

- l'ensemble des sommets V se scinde en deux sous-ensembles distincts $V = V_b \sqcup V_n$, les éléments de V_b sont les sommets blancs et ceux de V_n sont les sommets noirs,
- toute arête de E a un élément dans V_b et un élément dans V_n. E est donc un ensemble de paires d'un sommet de V_b et d'un sommet de V_n.





Graphes bipartis

Définition

Un graphe biparti est un graphe non orienté (V, E) où

- l'ensemble des sommets V se scinde en deux sous-ensembles distincts $V = V_b \sqcup V_n$, les éléments de V_b sont les sommets blancs et ceux de V_n sont les sommets noirs,
- toute arête de E a un élément dans V_b et un élément dans V_n. E est donc un ensemble de paires d'un sommet de V_b et d'un sommet de V_n.

Question

Les graphes complets sont-ils bipartis ?

Graphes bipartis

Proposition

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impair.

Exercice(s)

Exercices 2 et 3 de la feuille de TD 3

Suite graphique

Définition

Une suite d'entiers $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ est une suite graphique s'il existe un graphe qui a $n+1$ sommets et un sommet de degré δ_i pour tout i.

Exemple

Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

- $(3,3,3,3,3)$
- $(3,1)$
- $(3,2,2,1)$

Retour sur les degrés, connexité et acyclicité

Exercice(s)

Exercices 1 à 6 du TD 3

Qu'est-ce qu'un arbre ?

Définition

Un arbre est un graphe connexe et acyclique (=sans cycle).

Théorème (Exercice 7 du TD 3)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *G est un arbre*
2. *Entre tous sommets x et y, il existe un et un seul chemin*
3. *Le graphe est connexe et enlever une arête (n'importe laquelle) déconnecte le graphe (connexité minimale)*
4. *Le graphe est acyclique et ajouter n'importe quelle arête forme un cycle (acyclicité maximale)*
5. *G est connexe et $|E| = |V| - 1$*
6. *G est acyclique et $|E| = |V| - 1$*

Propriétés des arbres

Définition

Une feuille est un sommet de degré 1. Les autres sommets sont appelés nœuds.

Lemme

Tout arbre, sur au moins deux sommets, possède au moins deux feuilles

Lemme

Pour G un graphe et v une feuille de G, G est un arbre si et seulement si $G - \{v\}$ est un arbre.

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercices 7 à 9 de la feuille de TD 3

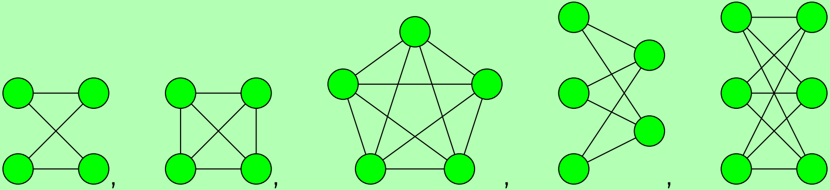
Graphes planaires

Définition

Un graphe planaire est un graphe qui possède une représentation dans le plan dans laquelle deux arêtes ne se coupent jamais

Exemples

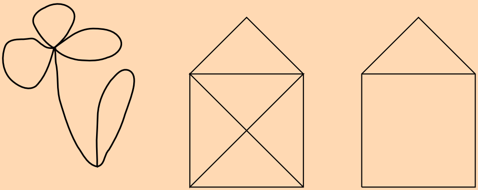
Les graphes suivants sont-ils planaires ?



Graphes eulériens

Question

Est-il possible de tracer chacun des dessins ci-dessous sans lever le crayon et sans repasser deux fois par le même endroit ?



Exercice(s)

Exercice 1 de la feuille de TD 4

Graphes eulériens

Un graphe qui possède un tel chemin est dit eulérien.

Définition

Un graphe eulérien est un graphe qui admet une marche simple (=marche à arêtes distinctes) visitant toutes les arêtes (une et une seule fois) avec même sommet de départ et d'arrivée.
Un graphe pseudo-eulérien est un graphe qui admet une marche simple (=marche à arêtes distinctes) visitant toutes les arêtes (une et une seule fois).

Théorème

Un graphe $G = (V, E)$ est eulérien ssi il est connexe et tous ses sommets ont degré pair.

Graphes bipartis complets

Définition

Un graphe biparti est un graphe non orienté (V, E) où

- l'ensemble des sommets V se scinde en deux sous-ensembles distincts $V = V_b \sqcup V_n$, les éléments de V_b sont les sommets blancs et ceux de V_n sont les sommets noirs,
- toute arête de E a un élément dans V_b et un élément dans V_n. E est donc un ensemble de paires d'un sommet de V_b et d'un sommet de V_n.

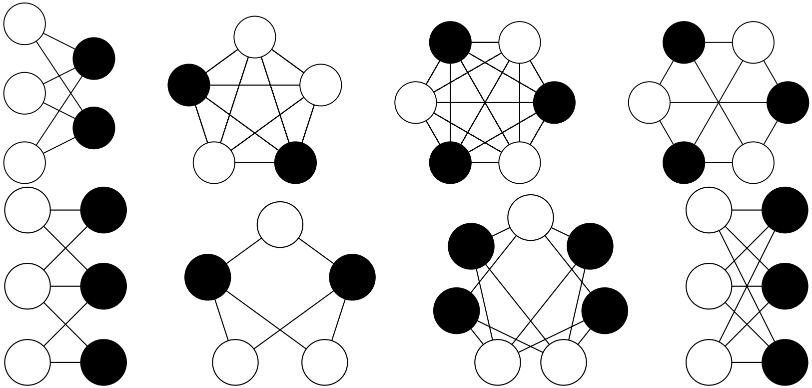
Définition

Un graphe biparti $(V_b \sqcup V_n, E)$ est complet si pour tous sommets $b \in V_b$ et $n \in V_n$, l'arête $\{b, n\}$ appartient à E.
On note $K_{m,n}$ le graphe biparti complet avec m sommets noirs et n sommets blancs.

Graphes bipartis complets

Question

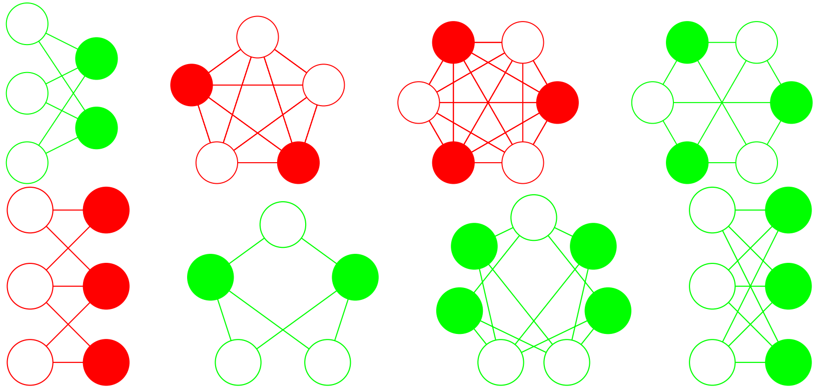
Les graphes suivants sont-ils bipartis complets ?



Graphes bipartis complets

Question

Les graphes suivants sont-ils bipartis complets ?



Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercices 2 à 5 de la feuille de TD 4

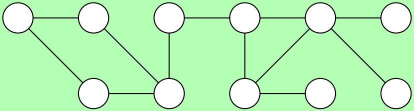
Un peu de lexique des graphes

Définition

Un isthme (ou pont) est une arête dont la suppression déconnecte la composante connexe dont il fait partie.
Un point d'articulation est un sommet dont la suppression déconnecte la composante connexe dont il fait partie.

Exemple

Indiquez les isthmes et points d'articulation dans le graphe ci-dessous :



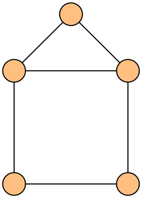
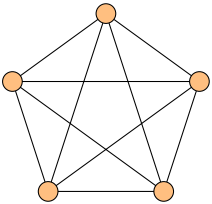
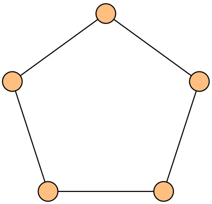
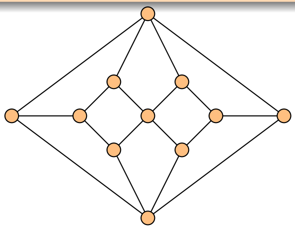
Graphes hamiltoniens

Définition

Un graphe hamiltonien est un graphe qui admet un cycle passant par tous ses sommets. Le chemin induit par le cycle passe alors une et une seule fois par tous les sommets.
Un graphe pseudo-hamiltonien est un graphe qui admet un chemin passant par tous ses sommets (une et une seule fois).

Question

Les graphes suivants sont-ils hamiltoniens ?

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercice 6 de la feuille de TD 4

Motivation

illustration dé

Question

Alice et Bob sont à la fête foraine. Une des attractions consiste à deviner le résultat d'un lancer simultané de deux dés. La participation s'élève à 1€ mais le gain annoncé en cas de victoire est de 5€ : jouer à ce jeu est-il rentable ?

Motivation

illustration dé

Question

Alice et Bob sont à la fête foraine. Une des attractions consiste à deviner le résultat d'un lancer simultané de deux dés. La participation s'élève à 1€ mais le gain annoncé en cas de victoire est de 5€ : jouer à ce jeu est-il rentable ?

Réponse

En fin de cours !

Dénombrement et probabilité

Exemple

Considérant une famille qui a au plus trois enfants :

- Combien y a-t-il de fratries possibles ?
- Combien y a-t-il de fratries avec au moins un garçon et au moins une fille ? FG, GF, FFG, FGF, GFF, FGG, GFG, GGF -> 8
- Quel est le pourcentage des familles à au plus trois enfants qui ont au moins un garçon et au moins une fille ? Conclusion : plus de la moitié des familles vérifient ça !

Pour s'échauffer

Exercice(s)

Exercices 1 et 2 de la feuille de TD 5

Principe d'inclusion-exclusion

Rappel

Soient A et B deux ensembles.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exemple

Dans une classe de 50, il y a 30 filles et 35 étudiants bruns : montrer qu'il y a au moins 15 filles brunes.

Principe d'inclusion-exclusion

Théorème

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles. Le nombre d'éléments de $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ qui ont au moins une de ces propriétés est donné par :

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}|$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

Pour s'échauffer

Exercice(s)

Exercice 3 de la feuille de TD 5

Espaces et univers

Définition

Un espace de probabilité (ou espace probabilisé) est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$ formé :

- un ensemble fini Ω appelé univers, un sous-ensemble de Ω est alors un évènement et les éléments de Ω sont appelés évènements élémentaires,
- une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :
  - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, pour tout $A, B \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant $A \cap B = \emptyset$.

Exemples

lancers de un dé, de deux dés, prélèvement de deux boules dans une urne ...

Retour sur l'exercice 2

Considérons une urne contenant une balle rouge et trois balles vertes. On tire une première balle puis une deuxième sans remise. Deux points de vue principaux :

- Univers : Ensemble des choix possibles

  $\Omega =$

  Il y en a en tout : .
- Probabilité :

$$\mathbb{P}(ViVj) = 1/4 \times 1/3 = 1/12$$
$$\mathbb{P}(RVi) = 1/12$$
$$\mathbb{P}(ViR) = 1/12$$

Retour sur l'exercice 2

Considérons une urne contenant une balle rouge et trois balles vertes. On tire une première balle puis une deuxième sans remise. Deux points de vue principaux :

- Univers : Ensemble des choix possibles

  $\Omega =$

  Il y en a en tout : 12.
- Probabilité :

$$\mathbb{P}(ViVj) = 1/4 \times 1/3 = 1/12$$
$$\mathbb{P}(RVi) = 1/12$$
$$\mathbb{P}(ViR) = 1/12$$

Retour sur l'exercice 2

Considérons une urne contenant une balle rouge et trois balles vertes. On tire une première balle puis une deuxième sans remise. Deux points de vue principaux :

- Univers : Ensemble des résultats possibles observés par un membre extérieur

$$\Omega =$$

  Il y en a en tout :

- Probabilité :

$$\mathbb{P}(VV) = 1/2$$
$$\mathbb{P}(RV) = 1/4$$
$$\mathbb{P}(VR) = 1/4$$

Retour sur l'exercice 2

Considérons une urne contenant une balle rouge et trois balles vertes. On tire une première balle puis une deuxième sans remise. Deux points de vue principaux :

- Univers : Ensemble des résultats possibles observés par un membre extérieur

$$\Omega =$$

  Il y en a en tout : 3

- Probabilité :

$$\mathbb{P}(VV) = 1/2$$
$$\mathbb{P}(RV) = 1/4$$
$$\mathbb{P}(VR) = 1/4$$

Probabilité uniforme

Définition

Une probabilité est dite **uniforme** quand pour tout évènement élémentaire $\omega \in \Omega$, on a :

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Il y a d'autres types de probabilité. Par exemple, si l'on lance simultanément deux dés cubiques équilibrés, quelles sont les probabilités respectives des évènements :
A="Il y a un 1 et un 2"
et
B="Il y a deux 6"?

Espaces et univers

Proposition

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup A^c) = 1$
- *Si* $A \subseteq B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Exemple

Un dé rouge et un dé vert sont lancés, quelle est la probabilité que l'un des deux dés donne un 2 ?

Espaces et univers

Proposition

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup A^c) = 1$
- *Si* $A \subseteq B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Exemple

Un dé rouge et un dé vert sont lancés, quelle est la probabilité que l'un des deux dés donne un 2 ?

$$\begin{aligned} P(R3 \cup G2) &= P(R3) + P(G2) - P(R3 \cap G2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Espaces et univers

Proposition

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup A^c) = 1$
- *Si* $A \subseteq B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Exemple

- Quelle est la probabilité que lors du lancer d'un dé, le dé donne 1 ou un nombre strictement plus grand que 1 ?
- Lors du lancer d'un dé, que dire de la probabilité d'obtenir un 2 par rapport à celle d'obtenir un nombre pair ?

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercices 4 à 7 de la feuille de TD5 (5 et 7)

Probabilités conditionnelles et indépendance

Soient A et B deux évènements.

Définition

A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Exemple

On lance onze fois de suite une pièce équilibrée. Que dire des évènements A="le résultat des 10 premiers lancers est face" et B="le onzième lancer donne face"?

Probabilités conditionnelles et indépendance

Soient $A_1, \ldots, A_k$, k évènements.

Définition

Les A_k sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}) = \prod_{j=1}^{p} \mathbb{P}(A_{i_j}),$$

pour tout $\{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$.

Exemple

Exercice 8 de la feuille de TD5

Probabilités conditionnelles et indépendance

Ref : Merris

Attention

Différence entre indépendance et disjonction ! !

Considérons un jeu de 52 cartes dans lequel on tire au hasard une carte.
K="cette carte est un roi"
T="cette carte est un trèfle"
Q="cette carte est une reine"

Question

- K et T sont-ils indépendants ? disjoints ?
- Q et T sont-ils indépendants ? disjoints ?

exemple d'évènements indépendants et disjoints ? il faut que l'un des deux soit trivial

Probabilités conditionnelles et indépendance

Ref : Merris

Attention

Différence entre indépendance et disjonction ! !

Considérons un jeu de 52 cartes dans lequel on tire au hasard une carte.

K="cette carte est un roi"

T="cette carte est un trèfle"

Q="cette carte est une reine"

Question

- K et T sont-ils indépendants ? disjoints ?
- Q et T sont-ils indépendants ? disjoints ?

Réponse

K et T sont indépendants mais non disjoints et K et Q sont disjoints mais non indépendants.

Probabilités conditionnelles et indépendance

Définition

Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est donnée par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition

Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Probabilités conditionnelles et indépendance

Exemple

Supposons que quatre pièces équilibrées sont lancées. Considérons les trois évènements suivants
A="Au moins deux pièces sont côté face",
B="Au plus deux pièces sont côté face"
et C="Exactement deux pièces sont côté face".
Calculez :

1. $\mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}(A|B)$
5. $\mathbb{P}(A|C)$
6. $\mathbb{P}(A \cup B)$

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercices 8 à 11 de la feuille de TD5

Variable aléatoire

Définition

Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ (souvent dans $\mathbb{N}$).

Notation

Nous écrirons $\mathbb{P}(X = v)$ pour la probabilité $\mathbb{P}(X^{-1}(v))$.

Exemple

À une expérience de lancer successif de deux dés, on peut associer les variables aléatoires suivantes, pour w le résultat des deux lancers :
$S(w) =$ somme des points sur le dessus du dé
$P(w) =$ produit des points sur le dessus du dé
Quelles sont les probabilités associées à ces deux variables aléatoires ?

Une variable aléatoire est caractérisée par la probabilité de distribution de ses valeurs.

Indépendance des variables aléatoires

Définition

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout couple (x,y) de nombres réels,

$$\mathbb{P}((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y).$$

Si les variables ne prennent que des valeurs entières positives, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout couple (m,n) de nombres naturels,

$$\mathbb{P}((X = m) \cap (Y = n)) = \mathbb{P}(X = m) \cdot \mathbb{P}(Y = n).$$

Exemple

Les variables aléatoires S et P sont-elles indépendantes ?

Espérance (=comportement moyen)

La *valeur moyenne*, ou *espérance*, d'une variable aléatoire X est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times \mathbb{P}(\omega).$$

Quand la variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \times \mathbb{P}(X = n).$$

Exemple

- $\mathbb{E}(S)$
- $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$ pour $A \in \Omega$ et $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 sur les évènements élémentaires $\omega \in A$ et 0 sinon.
- ...

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercice 12 de la feuille de TD5

Espérance

Proposition

Si X et Y sont deux v.a. sur le même espace de probabilité, on a :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

De plus, si X et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Exemple

Calculer $\mathbb{E}(P)$.
Considérons un lancer de dé, $X = \mathbb{1}_{\omega=1}$ et $Y = \mathbb{1}_{\omega=2}$, calculer $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Un peu de pratique

Exercice(s)

Exercices 13 et 14 de la feuille de TD5

Réponse à Alice et Bob

Question

Alice et Bob sont à la fête foraine. Une des attractions consiste à deviner le résultat d'un lancer simultané de deux dés. La participation s'élève à 1€ mais le gain annoncé en cas de victoire est de 5€ : jouer à ce jeu est-il rentable ?

Réponse

Non !