

Mathématiques discrètes

Examen du mercredi 21 mai 2017

Durée : 3 heures

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite

Appareils électroniques éteints et rangés

Cet énoncé comporte 4 exercices sur 3 pages.

Préliminaires : Ce sujet est constitué de 4 exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Il est donc vivement conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. Il est bien entendu préférable de ne faire qu'une partie du sujet correctement plutôt que de tout bâcler.

Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Dans cet examen, « graphe » signifie « graphe non orienté simple ».

Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des pavages d'une bande de n cases (numérotées de 0 à $n-1$) par des tuiles carrées  et rectangulaires (couvrant deux cases consécutives) , et on note $f_n = |\mathcal{F}_n|$.

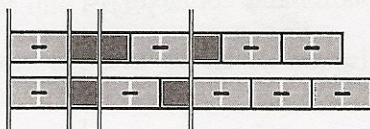
Par exemple,  est un élément de $\mathcal{F}_{12}$.

Le but de cet exercice est de démontrer l'identité $\sum_{k=0}^n f_k^2 = f_n f_{n+1}$, pour tout $n \geq 0$.

- Déterminer un ensemble A_n (le plus simple possible) ayant comme cardinal $\sum_{k=0}^n f_k^2$.

Soit $B_n = \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_{n+1}$. Un élément de B_n est dit *sécable en position k* si, dans chacun des deux pavages du couple, une tuile **commence** sur la case k : autrement dit, cette case est couverte soit par une tuile carrée, soit par une tuile rectangulaire posée sur les cases k et $(k+1)$. On appelle *dernière coupure* d'un élément de B_n la position maximale en laquelle il est sécable.

Par exemple, le couple (, ) est sécable aux positions 0, 2, 3 et 6, et seulement celles-ci ; sa dernière coupure est donc 6 :



- Décrire l'unique élément de B_n dont la dernière coupure est 0, et justifier son unicité.
- Pour $k \leq n$ fixé, décrire tous les éléments de B_n dont la dernière coupure est k .
- En déduire une bijection entre A_n et B_n , et conclure.

Exercice 2 :

Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer s'il existe un graphe

- (a) quelconque (b) connexe (c) non connexe (d) biparti

dont les sommets possèdent ces degrés. Pour le cas des graphes bipartis, préciser toutes les manières de répartir les degrés entre sommets blancs et sommets noirs. Justifier !

1. 4, 4, 3, 2, 2 2. 4, 4, 3, 2, 1 3. 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1 4. 4, 3, 3, 2, 1, 1

Exercice 3 :

On dit qu'un graphe est bicolorié si chacun de ses sommets est soit blanc, soit noir, de telle sorte que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

1. On considère un chemin γ d'extrémités s et t dans un graphe bicolorié G . Donner un lien entre les couleurs de s et t et la parité de la longueur de γ .
2. En déduire qu'un graphe contenant un cycle de longueur impaire ne peut pas être bicolorié.

On s'intéresse maintenant à la réciproque de ce résultat, que nous allons prouver de deux façons différentes. Pour simplifier la discussion, on suppose maintenant que G est un graphe *connexe* non vide.

3. a. Soit a une arête de G ; on note $G_{\setminus a}$ le graphe obtenu à partir de G après suppression de l'arête a . Montrer que si a ne fait pas partie d'un cycle de G , alors $G_{\setminus a}$ est composé d'exactly deux composantes connexes.
b. Montrer *par récurrence sur son nombre d'arêtes* qu'un graphe connexe ne contenant pas de cycle de longueur impaire peut être bicolorié.
4. a. Soit γ un chemin maximal dans G , et s une extrémité de γ . Montrer que tous les voisins de s appartiennent à γ .
b. En déduire que le graphe $G \ominus \{s\}$, obtenu à partir de G après suppression de s et de ses arêtes incidentes, est lui aussi connexe.
c. Montrer *par récurrence sur son nombre de sommets* qu'un graphe connexe ne contenant pas de cycle de longueur impaire peut être bicolorié.
5. Généraliser aux graphes non nécessairement connexes.

Exercice 4 :

Le but de cet exercice est de prouver le lemme suivant :

*Soit M un tableau de taille $n \times n$. Si chaque entier entre 1 et n apparaît exactement n fois dans M , alors (au moins) une ligne **ou** une colonne de M contient (au moins) $\sqrt{n}$ entiers distincts.*

1. Fixons d'abord $n = 4$.

a. Énoncer le lemme à montrer dans ce cas.

b. Prouver que chacun des exemples suivants vérifie l'hypothèse et la conclusion du lemme :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. Tout tableau de taille 4×4 contient-il une ligne ou une colonne avec trois valeurs distinctes ?

d. Démontrer le lemme dans le cas $n = 4$.

2. Considérons maintenant n quelconque. Pour chacune des propriétés suivantes, décrire un tableau de taille $n \times n$ contenant chaque entier de 1 à n exactement n fois, et tel que :

a. chaque ligne **et** chaque colonne contient exactement une fois chacun des n entiers ;

b. chaque ligne, **mais aucune colonne**, contient exactement une fois chacun des n entiers ;

c. chaque ligne **et** chaque colonne contient exactement $\sqrt{n}$ entiers distincts (en supposant que $\sqrt{n}$ est un entier).

Nous allons maintenant montrer le lemme de façon probabiliste. Dans la suite, on **fixe** un tableau M de taille $n \times n$ dans lequel chaque entier entre 1 et n apparaît exactement n fois.

On appelle *vecteur* de M toute ligne ou colonne de M . On se place dans l'univers Ω des vecteurs de M , muni de la probabilité uniforme ; Ω contient $2n$ vecteurs, chacun de taille n . Soit V un élément (aléatoire) de Ω , et soit Z la variable aléatoire égale au nombre d'entiers distincts dans V .

3. Pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle X_i la variable aléatoire booléenne telle que $X_i = 1$ si i apparaît dans V , et $X_i = 0$ sinon.

a. Exprimer Z à l'aide de $X_1, X_2, \dots, X_n$.

b. En déduire une expression de la valeur moyenne $\mathbb{E}(Z)$ de Z en fonction des $\Pr(X_i = 1)$.

c. Calculer $\Pr(X_i = 1)$ pour chaque $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ pour les trois exemples M_1, M_2 et M_3 , et en déduire $\mathbb{E}(Z)$ dans chaque cas.

4. Soit ℓ et c les nombres de vecteurs (lignes ou colonnes) de M contenant l'élément 1.

a. Dans le cas particulier $\ell = 1$, montrer que $c = n$ et en déduire que $\Pr(X_1 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

b. Montrer plus généralement que $\Pr(X_1 = 1) = \frac{\ell + c}{2n}$.

c. Soit $M^{(1)}$ le tableau obtenu à partir de M en supprimant toutes les lignes et colonnes sans 1. Quelles sont les dimensions de $M^{(1)}$? En déduire que $\ell \cdot c \geq n$.

d. En déduire que $\Pr(X_1 = 1) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Indication : on pourra démontrer puis utiliser l'inégalité $\ell + c \geq 2\sqrt{\ell \cdot c}$ pour tous $\ell, c \geq 0$.

5. En déduire que $\mathbb{E}(Z) \geq \sqrt{n}$.

6. Conclure.