Mathématiques discrètes
Partiel du mercredi 7 novembre 2016

Durée : 2 heures
Document autorisé : une feuille A5 manuscrite
Appareils électroniques éteints et rangés

Cet énoncé comporte 5 exercices sur 2 pages.

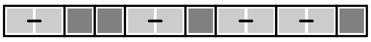
Préliminaires : *Ce sujet est constitué de 5 exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Il est donc vivement conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. Le sujet est long, le barème en tiendra compte. Il est bien entendu préférable de ne faire qu'une partie du sujet correctement plutôt que de tout bâcler.*

Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Dans tout l'énoncé, on note $|E|$ le cardinal d'un ensemble E.

Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des pavages d'une bande de n cases par des tuiles $\blacksquare$ et $\boxminus$. On note $\mathcal{F}_n^{\blacksquare}$ et $\mathcal{F}_n^{\boxminus}$ les sous-ensembles de $\mathcal{F}_n$ constitués des pavages dont la dernière tuile est respectivement un $\blacksquare$ ou un $\boxminus$.

Par exemple,  est un élément de $\mathcal{F}_{12}^{\blacksquare}$.

On note enfin $f_n = |\mathcal{F}_n|$.

1. Justifier que $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$ et $f_4 = 5$.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, décrire une bijection entre $\mathcal{F}_n^{\blacksquare}$ et $\mathcal{F}_{n-1}$, et entre $\mathcal{F}_n^{\boxminus}$ et $\mathcal{F}_{n-2}$. En déduire une relation de récurrence satisfaite par la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Démontrer l'égalité $f_{2n} = f_n^2 + f_{n-1}^2$, pour tout $n \geqslant 1$.
(indication : on pourra considérer, pour chaque élément de $\mathcal{F}_{2n}$, la ou les tuiles couvrant les cases n et $n+1$)

Exercice 2 :

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $(d_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite d'entiers strictement positifs. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) il existe un arbre à n sommets $[\![1, n]\!]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $deg(i) = d_i$.

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Exercice 3 :

Soit un graphe G dont tous les sommets ont degré au moins 3. Montrer que G possède un cycle avec une *diagonale*, c'est-à-dire un cycle dont deux sommets non consécutifs sont voisins dans G.

(indication : vous pouvez si vous le souhaitez considérer un chemin élémentaire de longueur maximale, puis examiner les voisins d'une des extrémités.)

Exercice 4 :

On rappelle qu'un graphe $G = (S, A)$ est *biparti* si et seulement s'il existe une partition $S = B \cup N$ de l'ensemble des sommets telle que toute arête a une extrémité dans B et une extrémité dans N.

1. Montrer qu'un graphe biparti ne contient aucun cycle de longueur impaire.

2. Réciproquement, soit G un graphe connexe ne contenant aucun cycle de longueur impaire, et soit u et v deux sommets de G.

- **a.** Montrer que les longueurs des chemins de u à v dans G ont toutes même parité.
- **b.** Posons $N = \{u\} \cup \{w \in S : \text{il existe un chemin de longueur paire de } u \text{ à } w\}$ et $B = S \setminus N$. Montrer qu'il n'existe pas d'arête entre deux sommets de N, ni entre deux sommets de B.

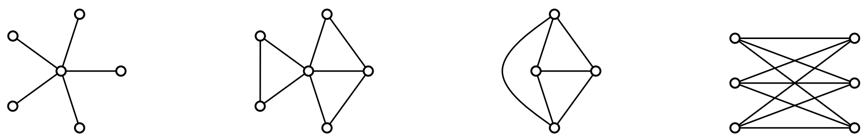
3. Expliquer comment généraliser le résultat précédent au cas G non connexe.

Exercice 5 :

Le but de cet exercice est de montrer que tout graphe non vide ayant un nombre pair de sommets possède la propriété **(P)** suivante : il existe (au moins) deux sommets ayant un nombre pair de voisins communs.

1. Comprendre le problème.

- **a.** Justifier que les graphes suivants possèdent la propriété **(P)**.



G_1 G_2 G_3 G_4

- **b.** Montrer que le graphe complet K_n possède la propriété **(P)** si et seulement si n est pair.
- **c.** La propriété **(P)** peut-elle être vérifiée par un graphe ayant un nombre impair de sommets ?

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Pour tous $s, t \in S$, on note $\mathcal{V}(s)$ l'ensemble des voisins de s, $\Gamma(s, t)$ l'ensemble des chemins (élémentaires) de longueur 2 de s à t :

$$\Gamma(s,t) = \{\gamma = (s,u,t) \mid u \in S, \{s,u\} \in A \text{ et } \{u,t\} \in A\} ,$$

et $\Gamma(s) = \bigcup_{t \neq s} \Gamma(s,t)$.

Supposons par l'absurde que deux sommets quelconques du graphe G ont toujours un nombre impair de voisins communs, et soit s un sommet de G.

2. Étude de la parité de $|\Gamma(s)|$, épisode 1.

- **a.** Soit t un sommet de G distinct de s ; pourquoi s et t ont-ils au moins un voisin commun ?
- **b.** Expliquer pourquoi $|\Gamma(s)|$ est la somme d'un nombre impair de termes impairs.
- **c.** En déduire la parité de $|\Gamma(s)|$.

On note G_s le sous-graphe de G induit par $\mathcal{V}(s)$, c'est-à-dire le sous-graphe de G maximal d'ensemble de sommets $\mathcal{V}(s)$.

3. Étude de la parité de $|\Gamma(s)|$, épisode 2

- **a.** Soit t un sommet de G_s ; montrer que t est de degré impair dans G_s.
- **b.** En déduire que s est de degré pair dans G.
- **c.** En déduire la parité de $|\Gamma(s)|$.

4. Conclure.