Mathématiques discrètes
Examen du jeudi 5 janvier 2017

Durée : 3 heures
Document autorisé : une feuille A4 manuscrite
Appareils électroniques éteints et rangés

Cet énoncé comporte 5 exercices sur 3 pages.

Préliminaires : *Les 5 exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Il est bien entendu préférable de ne faire qu'une partie du sujet correctement plutôt que de tout bâcler.*

Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des pavages d'une bande de n cases par des tuiles carrées $\blacksquare$ et rectangulaires (couvrant deux cases) $\boxed{\;-\;}$.

Par exemple, $\boxed{\;-\;}\blacksquare\blacksquare\boxed{\;-\;}\blacksquare\boxed{\;-\;}\boxed{\;-\;}\blacksquare$ est un élément de $\mathcal{F}_{12}$.

On note $f_n = |\mathcal{F}_n|$. On rappelle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $f_0 = f_1 = 1$, ainsi que la relation de récurrence $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Démontrer de deux manières l'égalité $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$, pour tout $n \geqslant 0$:
   a. en raisonnant par récurrence sur n ;
   b. par double comptage des éléments de $\mathcal{F}_{n+2}$ contenant au moins un $\boxed{\;-\;}$.
   (indication : pour interpréter le membre de gauche, couper juste avant le dernier $\boxed{\;-\;}$*)*
2. Démontrer par la méthode de votre choix l'égalité $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$, pour tous $m, n \geqslant 1$.
   (indication : on pourra considérer, pour chaque élément de $\mathcal{F}_{m+n}$, la ou les tuiles couvrant les cases m et $m+1$)

Exercice 2 :

Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer s'il existe

(a) un graphe[1] connexe (b) un graphe non connexe (c) un graphe biparti

dont les sommets possèdent ces degrés. Pour le cas des graphes bipartis, préciser toutes les manières de répartir les degrés entre sommets blancs et sommets noirs. Justifier !

1. $4, 3, 3, 2, 1$ **2.** $5, 3, 3, 2, 1$ **3.** $4, 3, 3, 2, 2, 1, 1$ **4.** $4, 3, 3, 1, 1, 1, 1$

1. dans cet examen, « graphe » signifie « graphe simple »

Exercice 3 :

Un *graphe sans triangle* est un graphe qui ne contient pas de cycle de longueur 3.

1. Montrer que tout graphe sans triangle à n sommets contient (au moins) un sommet de degré inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$.

   (indication : on pourra considérer une extrémité d'un chemin élémentaire de longueur maximale)

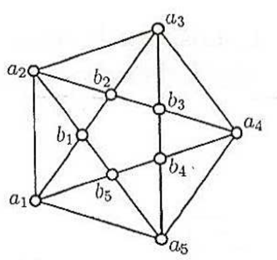
2. En déduire par récurrence sur n que, pour tout $n \geqslant 0$, tout graphe sans triangle à n sommets possède au plus $\frac{n^2}{4}$ arêtes.

Exercice 4 : graphes hamiltoniens

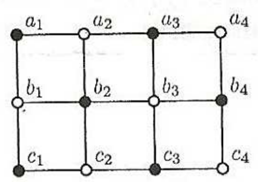
Soit G un graphe non orienté. On appelle *cycle hamiltonien* sur G un cycle passant exactement une fois en chaque sommet de G. On dit que G est *hamiltonien* s'il possède un cycle hamiltonien.

1. Parmi les graphes suivants, lesquels sont hamiltoniens ? Justifier.

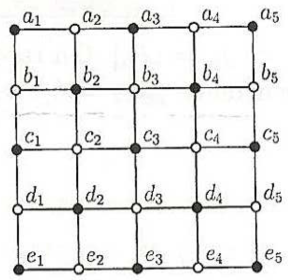
   (indication : il pourra être utile de remarquer que certains graphes sont bipartis)



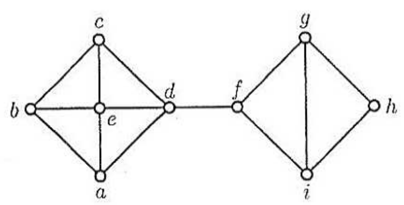
G_1



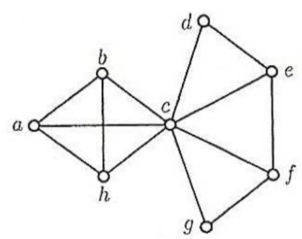
G_2



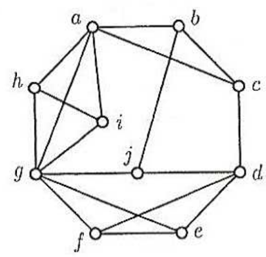
G_3



G_4



G_5



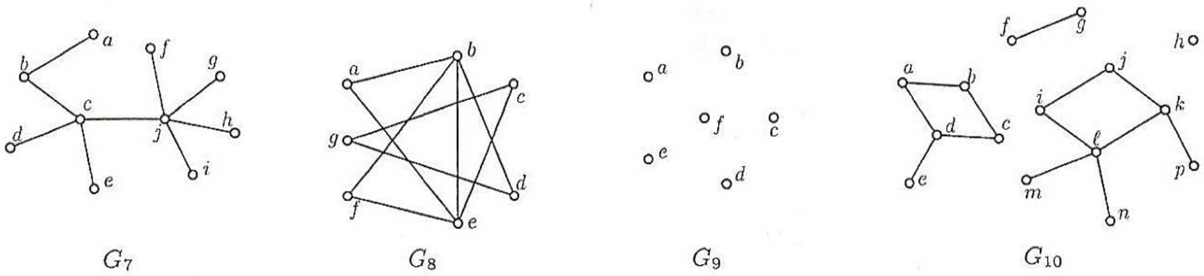
G_6

2. Pour quelle(s) valeur(s) de n le graphe complet K_n est-il hamiltonien ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de m et n le graphe biparti complet $K_{m,n}$ est-il hamiltonien ?

Exercice 5 :

Un graphe $G = (S, A)$ et une partition $S = B \cup N$ de son ensemble de sommets sont dits *cohérents* si chaque arête de G possède une extrémité dans B et l'autre dans N.

1. Compter les partitions cohérentes avec chacun des graphes suivants :



2. Exprimer de façon plus générale le nombre de partitions cohérentes avec un graphe donné.
3. Inversement, soit S un ensemble de n sommets et $S = B \cup N$ une partition de cet ensemble, avec $|B| = k$.
   a. Combien y a-t-il de graphes ayant pour ensemble de sommets S ?
   b. Combien y a-t-il de graphes cohérents avec la partition $S = B \cup N$?
   c. Soit $G = (S, A)$ un graphe choisi uniformément au hasard parmi tous les graphes ayant pour ensemble de sommets S. Quelle est la probabilité $P_{B,N}$ que G soit cohérent avec la partition $S = B \cup N$?
4. Soit $k \leqslant n$ un entier fixé. On dit qu'un graphe G sur S est *k-biparti* s'il existe une partition $S = B \cup N$ cohérente avec G, avec $|B| = k$.
   a. Combien existe-t-il de partitions $S = B \cup N$ avec $|B| = k$?
   b. En déduire une majoration de la probabilité P_k qu'un graphe sur S choisi uniformément au hasard soit k-biparti.
5. En utilisant le fait que $k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4}$ pour tout k, en déduire une majoration raisonnable de la probabilité qu'un graphe à n sommets soit biparti.
6. En déduire que cette probabilité tend vers 0 quand n grandit.