Mathématiques discrètes
Examen du mercredi 22 juin 2016

Durée : 3 heures
Document autorisé : une feuille A4 manuscrite
Appareils électroniques éteints et rangés

Préliminaires : *Ce sujet est constitué de 5 exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Il est donc vivement conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. Il est bien entendu préférable de ne faire qu'une partie du sujet correctement plutôt que de tout bâcler.*

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 : modélisation *(barème indicatif : 2 points)*

On souhaite connaître le nombre d'associations et de personnes nécessaires pour remplir les conditions suivantes :

- chaque personne est membre d'exactement deux associations,
- chaque association comprend exactement k membres ($k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$),
- deux associations ont toujours exactement un membre en commun.

1. Modéliser ce problème par un graphe où chaque sommet représente une association. Quel est le graphe obtenu ? Justifier.
2. En déduire, en fonction de k, le nombre d'associations et de personnes nécessaires pour remplir les conditions ci-dessus.

Exercice 2 : tour de taille des graphes réguliers *(barème indicatif : 4 points)*

Exam

Soit un entier $k \geqslant 2$ et un graphe $G = (S, A)$ k-régulier, c'est-à-dire que tous ses sommets ont degré exactement k.

1. Montrer que G contient un cycle de longueur *au moins* $k+1$. (*Indication : considérer un chemin maximal et les voisins d'une de ses extrémités*)

Cela établit l'existence de « *grands* » cycles dans les graphes réguliers. À l'inverse, on définit le *tour de taille* de G, noté $t(G)$, comme la longueur de son cycle (non vide) le plus court. Le but de cet exercice est de déterminer une relation entre le tour de taille d'un graphe k-régulier et son nombre de sommets.

Soit s_0 un sommet de G et r un entier tel que $r < \frac{t(G)-1}{2}$. On note $B_r(s_0)$ la *boule fermée de centre s_0 et de rayon r* :

$$B_r(s_0) = \{s \in S \mid d(s_0, s) \leqslant r\} \qquad \text{(où } d(.,.) \text{ désigne la distance entre sommets de } G)$$

et $G_r(s_0)$ le sous-graphe induit par $B_r(s_0)$ (*c'est-à-dire le graphe dont l'ensemble de sommets est $B_r(s_0)$ et dont les arêtes sont les éléments de A reliant deux sommets de $B_r(s_0)$*).

2. Montrer que $G_r(s_0)$ ne contient pas de cycle.
   (*Indication : par l'absurde, considérer un cycle γ et $v \in \gamma$ à distance maximale de s_0*)
3. Pour un entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant r$, combien G a-t-il de sommets à distance i de s_0 ?
   En déduire le cardinal de $B_r(s_0)$. k^i
4. **Application numérique.** On suppose maintenant que $k = 3$. Donner une majoration du tour de taille de G en fonction de son nombre de sommets, en admettant que le résultat de la question précédente reste vrai pour $r = \lfloor \frac{t(G)-1}{2} \rfloor$.

Exercice 3 : récurrences dans les graphes *(barème indicatif : 6 points)*

Exam

Considérons les deux schémas de preuve ci-dessous :

> **Schéma 1** *On suppose que $\mathcal{P}_m$ est vraie pour tout $m < n$.*
> *On considère un graphe G quelconque de taille n, à partir duquel on construit un graphe de taille $m < n$, qui vérifie donc $\mathcal{P}_m$ par hypothèse de récurrence. On montre ensuite que cela entraîne que G vérifie $\mathcal{P}_n$.*

> **Schéma 2** *On suppose que $\mathcal{P}_m$ est vraie pour tout $m < n$.*
> *On considère un graphe G de taille m pour un certain $m < n$ vérifiant $\mathcal{P}_m$, à partir duquel on construit un graphe de taille n, et on montre que ce nouveau graphe vérifie $\mathcal{P}_n$.*

1. Quel est le schéma adapté pour prouver l'hérédité d'une propriété $\mathcal{P}_n$ portant sur des graphes de taille n dans chacun des deux cas suivants ? Pourquoi ?
   a. si $\mathcal{P}_n$ est de type existentiel : « *Il existe un graphe de taille n tel que...* » ;
   b. si $\mathcal{P}_n$ est de type universel : « *Tout graphe de taille n vérifie...* ».

Degrés variés On souhaite montrer la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante, pour tout entier $n \geqslant 2$:

> *Il existe un graphe à n sommets tel que, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, un des n sommets a degré i — en particulier, exactement deux sommets ont même degré.*

2. Étant donné un graphe $G = (S, A)$, on définit le graphe $\bar{G} = (S, \bar{A})$ où :
$$\{u, v\} \in \bar{A} \iff \{u, v\} \notin A\,,$$
   pour toute paire de sommets (distincts) $\{u, v\}$ de S. On note $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les degrés des n sommets de G. Quels sont les degrés des sommets du graphe $\bar{G}$?
3. Montrer $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n, en spécifiant le schéma de récurrence suivi.
   (*Indication : penser à $\bar{G}$...*)
4. Pour quelles valeurs de n existe-t-il un graphe à n sommets de degrés tous distincts ? Justifier.

Graphes sans triangle Un *graphe sans triangle* est un graphe qui ne contient pas de cycle de longueur 3. On souhaite montrer la propriété $\mathcal{R}_n$ suivante, pour tout $n \geqslant 0$:

> *Soit un graphe sans triangle avec n sommets et k arêtes, alors $k \leqslant \frac{n^2}{4}$.*

5. Soit G un graphe sans triangle à n sommets, $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un sommet de G qui a au plus $\frac{n}{2}$ voisins (au sens large).

6. En déduire $\mathcal{R}_n$ en raisonnant par récurrence sur n.

Exercice 4 : frises

(barème indicatif : 4 points)

On dispose de tuiles colorées de type ,  et , avec lesquelles on crée des frises en pavant une bande rectangulaire de longueur n et de hauteur 1. La figure ci-dessous donne un exemple de telle frise de longueur 15 :

1. Combien y-a-t-il de frises de taille n, si la taille est le nombre de tuiles ?

On note $\mathcal{F}$ la classe des frises énumérées selon leur longueur, F_n le nombre de frises de longueur n, et $F(z)$ la série génératrice correspondante.

2. Décrire une décomposition récursive de la classe $\mathcal{F}$.

3. En déduire une équation satisfaite par $F(z)$, puis la résoudre.

4. En déduire une expression close pour le nombre F_n.

Exercice 5 : énumération d'arbres

(barème indicatif : 4 points)

On rappelle qu'un arbre binaire est dit *complet* si chacun de ses sommets est soit une *feuille*, soit un *nœud* possédant exactement deux fils.

Parmi les familles suivantes, déterminer lesquelles forment des classes combinatoires ; le cas échéant, écrire une équation satisfaite par la série génératrice associée.

1. la famille $\mathcal{A}$ des arbres binaires complets,

- **a.** avec pour taille le nombre d'arêtes ;
- **b.** avec pour taille le nombre de feuilles ;

2. la famille $\mathcal{B}$ des arbres binaires complets à sommets noirs ou blancs,

- **a.** avec pour taille le nombre de feuilles ;
- **b.** avec pour taille le nombre de feuilles blanches ;

3. la famille $\mathcal{C}$ des arbres binaires complets à sommets noirs ou blancs dont les nœuds noirs n'ont pas d'enfant noir,

- **a.** avec pour taille le nombre de sommets blancs ;
- **b.** avec pour taille le nombre de sommets noirs.