Mathématiques discrètes
Partiel du mardi 27 octobre 2015

Durée : 2 heures 30
Document autorisé : une feuille A5 manuscrite
Appareils électroniques éteints et rangés

Sujet B

Préliminaires : *Ce sujet est constitué de 5 exercices qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Il est donc vivement conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. Il est bien entendu préférable de ne faire qu'une partie du sujet correctement plutôt que de tout bâcler.*

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 : petits dénombrements

1. Combien y a-t-il de mots de longueur 15 sur l'alphabet $\{A, C, G, T\}$?
2. Combien y-a-t-il de mots formés d'exactement 6 « A », 3 « C », 2 « G » et 4 « T » ?
3. Combien y-a-t-il de *palindromes* formés d'exactement 6 « A », 3 « C », 2 « G » et 4 « T » ?
4. Combien y-a-t-il de mots formés d'exactement 6 « A » et 9 « C » sans « A » consécutifs ?

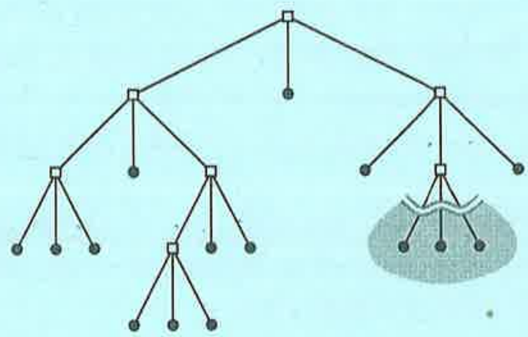
(Pour chaque question, on attend naturellement une expression numérique et non son évaluation.)

Exercice 2 : démonstration par récurrence

Cet exercice est un exercice de rédaction : le but n'est pas ici de trouver l'idée de la preuve, mais de la rédiger correctement, sans erreur ni trou.

Un arbre *ternaire complet* est un arbre plan dont chaque sommet est soit une feuille, soit un nœud possédant exactement trois fils. Combien un arbre ternaire complet à n nœuds possède-t-il de feuilles ?

On demande une démonstration par récurrence, basée sur le schéma suivant :



Exercice 3 : identités sur les nombres de Fibonacci

On rappelle que le n^e nombre de Fibonacci f_n compte en particulier les pavages d'une bande de n cases par des tuiles  et , comme par exemple :

.

À l'aide de cette interprétation, démontrer les formules suivantes :

1. $\forall m, n \geqslant 1, \quad f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$
   (distinguer 2 cas selon que les cases m et $m+1$ sont dans la même tuile ou non)
2. $\forall n \geqslant 1, \quad f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$
   (considérer les pavages de longueur $n+2$ utilisant au moins une tuile *)*
3. $\forall n \geqslant 1, \quad f_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_{k-1}$
   (remarquer qu'un pavage de longueur $2n-1$ utilise au moins n tuiles, et conditionner selon la nature des n premières tuiles)

Exercice 4 : séries génératrices de frises

On dispose de tuile colorées de type  et  avec lesquelles on crée des frises en pavant une bande rectangulaire de longueur n et de hauteur 2, en tournant éventuellement les tuiles par quarts de tour. La figure ci-dessous donne un exemple de telle frise de longueur 15 :

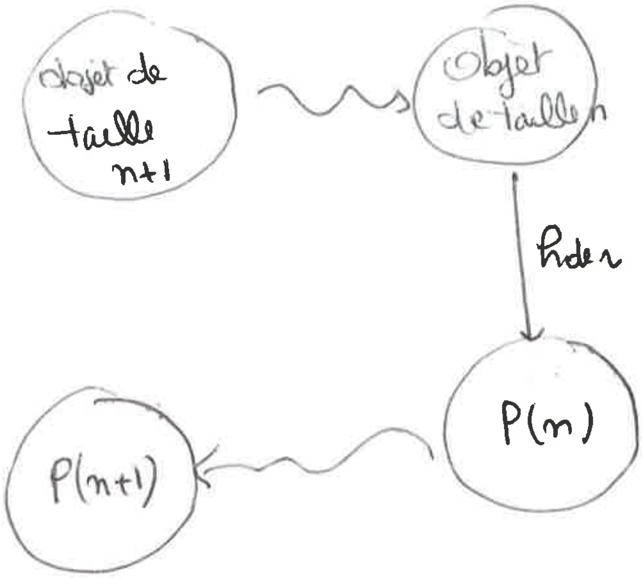
On note $\mathcal{F}$ la classe des frises énumérées selon leur longueur, F_n le nombre de frises de longueur n, et $F(z)$ la série génératrice correspondante.

1. Décrire une décomposition récursive de la classe $\mathcal{F}$.
2. En déduire une équation satisfaite par $F(z)$, puis la résoudre.
3. En déduire une expression close pour le nombre F_n.

Exercice 5 : énumération d'arbres

Parmi les familles suivantes, déterminer lesquelles forment des classes combinatoires ; le cas échéant, écrire une équation satisfaite par la série génératrice associée.

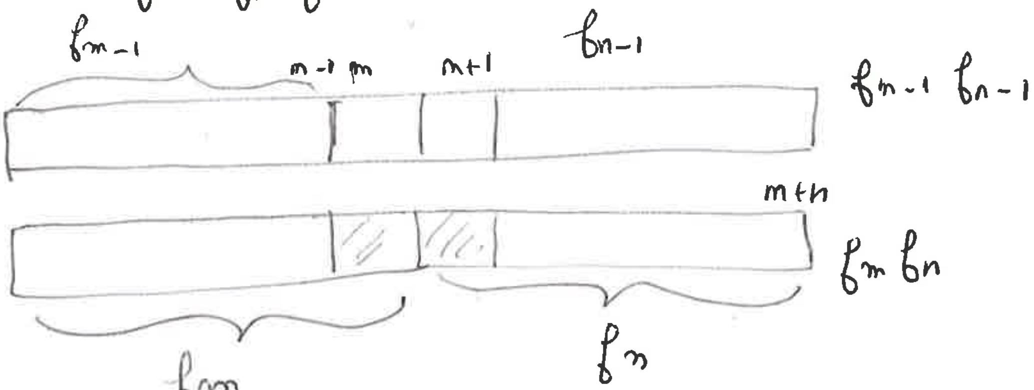
1. la famille $\mathcal{T}$ des arbres ternaires complets, avec pour taille le nombre de nœuds (ternaires) ;
2. la famille $\mathcal{B}$ des arbres binaires complets à sommets noirs ou blancs,
   a. avec pour taille le nombre d'arêtes ;
   b. avec pour taille le nombre d'arêtes *bicolores* (celles dont les extrémités ne sont pas de la même couleur) ;
3. la famille $\mathcal{C}$ des arbres binaires complets à sommets noirs ou blancs dont la racine est noire, et dont les nœuds noirs ont exactement un enfant noir et un enfant blanc,
   a. avec pour taille le nombre de sommets blancs ;
   b. avec pour taille le nombre de sommets noirs.



Ex 3

$\forall m, n \geq 2$

$f(m+n) = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$



2- (renvoi à un exo) TD1

3- $\forall n \geq 0 \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$

i tuiles □

j tuiles [;]

$i + 2\cancel{j}k = n$

k = nb de tuiles de taille 2.

nb de tuiles : $i + j = n - \cancel{j}k$

$\binom{n-k}{k}$ le nb de façons de paver une bande de lg n avec k tuiles [ ] et des tuiles □

Exo : très bien fait.

Ex 1 Correct° n°1

$\mathcal{A} = \{A, C, G, T\}$

$\underbrace{l \times l \times \dots t}_{15 \text{ fois}}$

$4 \times 4 \times 4 \times \dots 4 = 4^{15}$

plaindromes

6A, 3C, 2G, 4T

$\underbrace{\_ \_ \_ \_}$ C _ _ _ _

seule moitié à fixer 3A, 1C, 1G, 2T

× × × × × × ×

on choisit où on met les A : $\binom{7}{3}$ moitié

on choisit où on met le C dans les emplacements restantes $\binom{4}{1} = 4$

on choisit où on met le G ... $\binom{3}{1} = 3$

$\binom{7}{3} \times 4 \times 3$

6A, 9C sans A consécutifs.

C × C × C × C × C × C × C × C × C

$\binom{10}{6}$

Correction Partie I

bleu: Edo 1.

①.
$$\mathcal{A} = \{A, C, G, T\}.$$
$$\underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_{15 \text{ fois}}$$

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{15 \text{ fois}} = 4^{15}$$

③. Palindromes 6A, 3C, 2G, 4T.

$$\underbrace{\text{-------}}_{\text{moitier à fixer}}\ C\ \text{-----}$$

moitier à fixer = 3A, 1C, 1G, 2T.

7 lettre
⇓
7 emplacement ⟹ x x x x x x x

On choisit où on met les A dans les ens $\binom{7}{3}$

" " " " le C dans les emplacement restant

$\binom{4}{1} = 4$.

" " " " G " " " $\binom{3}{1} = 3$.

④. 6A, 9C sans A consecutifs

emplacement 'A'.
↘ x C x C x C x C x C x C x C x C x C x

J'a 10 place pour mettre A alors nous on a 6 A alors on choisit 6 place parmi 10 $\binom{10}{6}$.

tjr partir de n+1 pas de n pour faire elle démonstration

bleu

Exo2 :

partir d'un objet de taille n+1 $\xrightarrow{\text{on se ramène à un}}$ objet de taille n.

par Hyp il ne donne

P(n) → P(n+1)

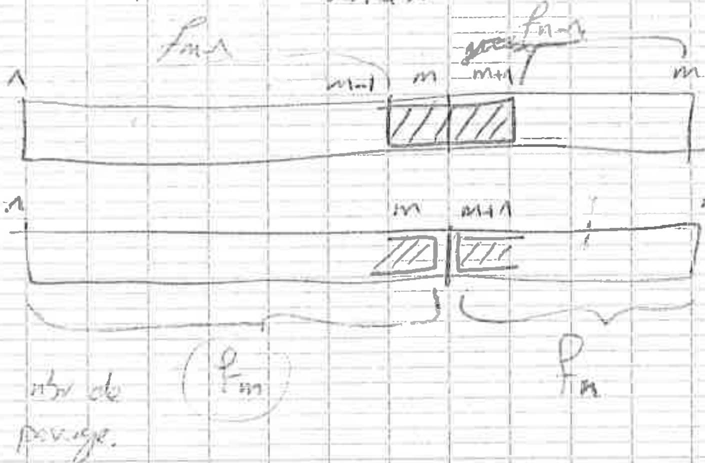
jaune

Exo3 :

① $\forall\, m,n \geq 1 \quad f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$

les ② case m et m+1 soit elle sont dans la même brique

sont pas dans la même brique.



$f_{m-1} f_{n-1}$

$+ 0$

$f_m f_n$

③ $\forall\, n \geq 0, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

i tuiles □ taille 1

k " □□ taille 2

$i + 2k = n$ frise

nbr tuile $i + k = n - k$

j'ai (n-k) tuile je choisi k tuile donc c'est les tuile de taille ②.

$\binom{n-k}{k}$ le nbr de façons de paver une bande de longueur n avec k tuiles de taille 2 □□ et des tuiles □

vert **Exo 5 :**

$\mathcal{C}$: quaternaires complets

taille : nb de sommets. ok (borne sur la hauteur).

en prend pas l'arbre vide donc y'a au moins un sommet

$$\mathcal{C} = \overset{\text{racine}}{\{\circ\}} \cup \{\circ\} \times \underbrace{\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}}_{4 \text{ fils}}$$

$$T(z) = z + z\,T^4(z).$$

$\mathcal{B}$: arbre binaire complet à sommets noirs et blancs,

a - nb d'arêtes ok.

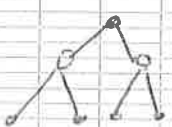
$$\mathcal{B} = \underset{\text{0 car pas d'arête}}{\{\circ\}} \cup \overset{\text{racine}}{\{\circ\}} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \quad \cancel{= \{\circ\} \cup \{\ldots\}}$$

on a pas marqué les arêt car on travail sur les arête pas sommet comme $\mathcal{C}$

alors $\mathcal{B} = \{\bullet, \circ\} \cup \{\ldots\} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$

$$B(z) = \underset{\text{nb d'élément}}{2}\,z^0 + 2\,z^{\overset{\text{nb d'arête}}{2}}\,B(z)^2$$

b - taille : nb d'arêtes monochromes



pas une classe combinatoire, car y'a une infinité d'arêt monochrome s'a fait pas une C. Combinatoire.