Université Paris Diderot - L3 | Année universitaire 2011–2012

Examen de Mathématiques Discrètes - Session 2

Mardi 19 juin 2012

Durée : 3 heure

Seules les notes de cours et de td sont autorisées.
Les téléphones portables et autres appareils électroniques de communication ne sont pas autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

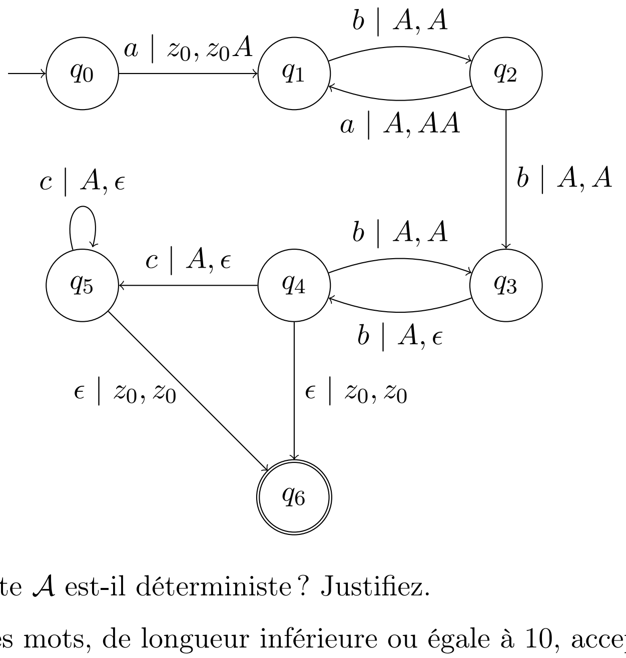
Exercice 1 : Langage algébrique (3 points)
Soit le langage $L = \{c^p a^n b^q \ / \ p > q \geqslant 0 \text{ et } n > 0\}$.

Question 1 : Explicitez une grammaire qui engendre L. Justifiez.

Question 2 : Donnez un automate à pile qui engendre L. Justifiez.

Question 3 : En déduire que L est un langage algébrique.

Exercice 2 : Automate et langage (4 points)
Soit l'automate $\mathcal{A} = (Q, A, Z, E, q_0, z_0)$ qui accepte par l'état final q_6 :



Question 1 : L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? Justifiez.

Question 2 : Donnez les mots, de longueur inférieure ou égale à 10, acceptés par $\mathcal{A}$.

Question 3 : Quel est le langage $L_{\mathcal{A}}$ des mots acceptés par $\mathcal{A}$? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 : Grammaire et langage (5 points)
Soit la grammaire algébrique $G = (A, V, P)$ où $A = \{a, b\}$, $V = \{S, T\}$ et

$$P : \begin{cases} S & \to & SaSb + Tb \\ T & \to & abT + a + b \end{cases}$$

Question 1 : Donnez les mots de longueur inférieure ou égale à 6 de $L_G(S)$, en explicitant pour chacun la suite de dérivations effectuées à partir de S pour l'obtenir.

Question 2 : Montrez que la grammaire G est ambiguë.

Question 3 : Décrivez le langage $L_G(T)$, puis le langage $L_G(S)$. Justifiez vos réponses.

Question 4 : G est-elle une grammaire propre ? Justifiez.

Question 5 : Donnez une grammaire G' en forme normale de Greibach équivalente à G.

Exercice 4 : Complexité (5 points)
Soit la complexité c_n, $n \geqslant 0$, en nombre d'appels à la fonction `alea` dans la fonction `f(n)` définie de la façon suivante :

```
f(n){
 m = alea(1,10);
 if(n>=1)
   m = m * f(n-1)
   if(n>=2)
    m = m + f(n-2) + f(n-2)
 return m;
}
```

Question 1 : Que valent c_0 et c_1 ? Montrez que la suite $(c_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie la récurrence linéaire suivante :

$$c_n = 1 + c_{n-1} + 2c_{n-2}, \forall n \geqslant 2.$$

Question 2 : Soit $C(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, la série génératrice de la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$. Déduisez de la question précédente une équation fonctionnelle vérifiée par la série génératrice $C(z)$. Exprimez ensuite la série $C(z)$ en fonction de z.

Question 3 : Déduisez une expression en fonction de n pour la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$.
Note : Il ne vous est pas demandé de prouver que l'expression de c_n donne bien une valeur entière pour tout $n \geqslant 0$. Néanmoins, il est conseillé de le vérifier sur les premières valeurs de n.

Exercice 5 : Série génératrice (3 points)
Soit la série génératrice $A(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$A(z) = 2z + 4zA(z) + 2zA^2(z),$$

avec $a_0 = 0$.

Question 1 : Exprimez la série $A(z)$ en fonction de z.

Question 2 : Déduisez une expression en fonction de n pour la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$.