Partiel de Mathématiques Discrètes

Mardi 18 octobre 2011

Durée : 1 heure

Les documents et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Questions de cours (4 points)

1. Les ensembles suivants forment-ils des classes combinatoires et pourquoi ?
  - (a) Ensemble des colliers de perles avec k , $k > 0$, couleurs de perle, comptés suivant le nombre de perles.
  - (b) Ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ comptés suivant leur longueur.
2. Les séries formelles suivantes sont-elles inversibles et pourquoi ?
  - (a) $\sum_{n \geq 0} nz^n$.
  - (b) $\sum_{n \geq 0} (n+1)z^n$.

Exercice 2 : Complexité (12 points)

1. Montrer la formule suivante : $\sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = n^2$.
2. Calculer en fonction de n , $n \geq 0$, la complexité c_n en nombre d'opérations du bout de code suivant :

```
for(i=1; i<=n; i++){
  for(j=1; j<=i; j++){
    a = operation(a, operation(i, j));
    b = operation(a, a);
  }
}
```

On ne comptera pas l'affectation (=) comme une opération.

3. Montrer que la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ vérifie une récurrence linéaire non-homogène à coefficients constants.
4. Dédurre de la question précédente une expression en fonction de z pour la série génératrice de la suite $(c_n)_{n \geq 0}$: $C(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$.

Exercice 3 : Séries génératrices (4 points)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite vérifiant une récurrence linéaire à coefficients constants et soit $A(z)$ sa série génératrice : $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Exprimer en fonction de z , de A et de certains de ses coefficients, la série génératrice de la suite $(p_n)_{n \geq 0}$: $p_n = 2^n a_{n+1}$.