

## Examen de Mathématiques Discrètes - 2ème session

Mardi 14 juin 2011

Durée : 3h

Le barème est donné à titre indicatif et peut être modifié. La notation est sur 25 et sera ramenée à 20.

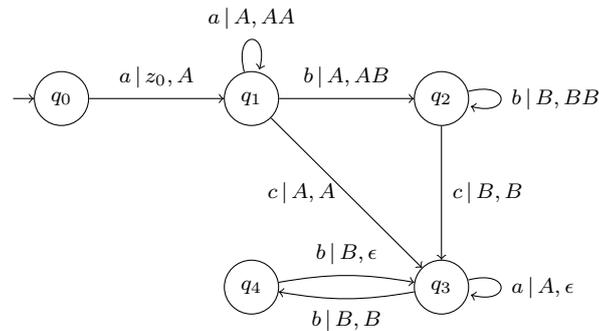
Documents autorisés : notes de cours et une feuille de notes manuscrites.

Les exercices sont tous indépendants.

**Pensez à bien justifier vos réponses et à poser les étapes intermédiaires d'un calcul.**

### Exercice 1 : Automate à pile et langage (4 points)

Soit l'automate  $\mathcal{A} = (Q, A, Z, E, q_0, z_0)$  qui accepte par pile vide :



1. L'automate  $\mathcal{A}$  est-il déterministe ?
2. Donnez les mots, de longueur inférieure ou égale à 8, acceptés par  $\mathcal{A}$ .
3. Quel est le langage  $L_{\mathcal{A}}$  des mots acceptés par  $\mathcal{A}$  ?

### Exercice 2 Grammaire et langage (7 points)

Soit la grammaire algébrique  $G = (A, V, P)$  où  $A = \{a, b\}$ ,  $V = \{S_1, S_2, S_3\}$  et

$$P : \begin{cases} S_1 \rightarrow aS_2aS_3 + S_2S_3 \\ S_2 \rightarrow aS_2a + S_3 \\ S_3 \rightarrow S_3S_3 + b \end{cases}$$

1. Montrez que  $G$  est ambiguë.
2. Donnez une grammaire  $G'$  en forme normale de Greibach équivalente à  $G$ . Pourquoi  $G'$  est-elle équivalente à  $G$  ?
3. Donnez un automate à pile sans  $\epsilon$ -transition qui accepte, par pile vide, les mots engendrés par  $G$ .
4. Décrivez les langages  $L_G(S_3)$ ,  $L_G(S_2)$  et  $L_G(S_1)$ .

### Exercice 3 Langage algébrique (3 points)

Soit l'alphabet  $A = \{a, b, c\}$  et soit le langage sur  $A^*$  :

$$L = \{w \in A^* / |w|_a = |w|_b \text{ ou } |w|_a = |w|_c\}.$$

1. Donnez une grammaire algébrique qui engendre  $L$ .
2. Donnez une chaîne de dérivations qui permet d'obtenir le mot  $acbccbcbac$ .

### Exercice 4 : Série génératrice (6 points)

1. Soit  $U(z)$  la série génératrice de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ 2nu_n &= u_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Calculez l'équation vérifiée par  $U(z)$ .

2. Montrez alors que  $U(z) = C_1 e^z + C_2 e^{\frac{z}{2}}$  en précisant les valeurs des constantes  $C_1$  et  $C_2$ .
3. Déduisez-en une formule pour  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 5 : Série génératrice exponentielle (5 points)

1. Donnez une formule close pour la série formelle  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n!} z^n$ .
2. Calculez une formule close pour la série formelle  $\sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^n \frac{p}{p!(n-p)!} z^n$ .
3. Soit  $\widehat{A}(z)$  la série génératrice exponentielle de la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  définie par  $a_0 = 1$  et  $a_n = \sum_{p=0}^n p \binom{n}{p}$ . Déduisez de la question 2 une formule pour  $a_n$  en fonction de  $n$ .