Université Paris 7- Denis Diderot
L3 d'Informatique
Mathématiques Discrètes

Examen de juin 2010
durée 3 heures
tous documents autorisés

Le but de ce problème est de montrer sur un exemple que l'image d'un langage algébrique par un homomorphisme inverse est un langage algébrique.

Partie préliminaire

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage $L = \{(ab)^n a(ab)^n a \mid n \in I\!N\}$.

Question 1 : Exhiber un automate à pile qui reconnaît L par pile vide et états d'acceptation.

Question 2 : Donner une grammaire algébrique propre qui engendre le langage L.

Une grammaire algébrique propre $G =< A, V, P >$ est sous *forme normale quadratique* si toutes ses règles sont de la forme : $v \longrightarrow v_1v_2$ avec $v_1, v_2 \in V$ ou bien $v \longrightarrow l$ avec $l \in A$. Une grammaire algébrique propre $G =< A, V, P >$ est sous *forme normale presque quadratique* si toutes ses règles sont de la forme : $v \longrightarrow v_1v_2$ avec $v_1, v_2 \in A \cup V$ ou bien $v \longrightarrow l$ avec $l \in A$.

Pour mettre une grammaire sous forme normale presque quadratique, on fait la construction suivante : tant qu'il existe une règle de membre droit de longueur strictement supérieure à 2 : $v \longrightarrow l_1l_2 \dots l_k$ où $l_i \in A \cup V$ et $k > 2$, on introduit une nouvelle variable v', et on remplace la règle en question par les deux règles : $v \longrightarrow l_1v'$ et $v' \longrightarrow l_2 \dots l_k$.

Question 3 : Montrer qu'en un nombre fini d'étapes, cette construction transforme une grammaire algébrique propre en une grammaire sous forme normale presque quadratique.

Pour mettre une grammaire algébrique propre sous forme normale quadratique en partant d'une grammaire sous forme normale presque quadratique, on fait la construction suivante : pour chaque lettre $a \in A$ apparaissant dans un membre droit de règle de longueur 2, on introduit une nouvelle variable v_a que l'on substitue à la lettre a dans le membre droit de la règle en question, et on ajoute la règle $v_a a$.

Question 4 : Vérifier que cette construction transforme une grammaire sous forme normale presque quadratique en une grammaire sous forme normale quadratique.

Question 5 : Mettre la grammaire trouvée en question 2 sous forme normale quadratique.

Partie principale

Nota : les sous-parties I, II et III sont indépendantes

Dans toute cette partie, $A = \{a, b\}$ et $B = \{x, y, z\}$ sont deux alphabets (disjoints).

I — application d'un morphisme direct

Soit $G =< A, V, P >$ une grammaire algébrique et ψ un morphisme $\psi : A^* \longrightarrow B^*$. On construit à partir de G et ψ une nouvelle grammaire $G' =< B, V, P' >$ où P' est constitué des règles : $v \longrightarrow \psi(m) \in P' \Longleftrightarrow v \longrightarrow m \in P$.

Question 6 : Montrer que $\forall v \in V, L_{G'}(v) = \psi(L_G(v))$.

Question 7 : Appliquer cette construction à la grammaire G trouvée précédemment et au morphisme ψ défini par :
$\psi(a) = xy$ et $\psi(b) = z$.

II — application d'une projection inverse

On considère sur $A \cup B$ le morphisme $\pi : (A \cup B)^* \longrightarrow A^*$ défini par :
$\pi(a) = a$, $\pi(b) = b$ et $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = 1$.
Ce morphisme qui recopie une partie de l'alphabet $A \cup B$ tandis qu'il efface l'autre partie est appelé une projection.

Soit $G =< A, V, P >$ une grammaire algébrique telle que il existe $v \in V$ pour lequel $L_G(v) = L$. On construit à partir de G une nouvelle grammaire $G' =< A \cup B, V \cup \{\sigma, \xi\}, P' >$ où P' est constitué des règles : $v \longrightarrow l_1\xi l_2\xi \ldots l_p\xi \in P'$ si $v \longrightarrow l_1 l_2 \ldots l_p \in P$ où $l_i \in A \cup V$, et des règles : $\xi \longrightarrow x\xi + y\xi + z\xi + 1$ et $\sigma \longrightarrow x\sigma + y\sigma + z\sigma + v$.

Question 8 : Appliquer cette construction à la grammaire G de règles :
$S \longrightarrow aTa + aa$
$T \longrightarrow bSb$
pour laquelle on choisit S comme non-terminal de départ, *i.e.* $L = L_G(S)$.

Question 9 : Montrer que $L_{G'}(\sigma) = \pi^{-1}(L)$.

III — intersection avec un langage reconnaissable

On considère sur $A \cup B$ le langage rationnel $K = \{xaba, yba, zab\}^*$.

Question 10 : Exhiber un automate fini (déterministe) qui reconnaît K (*nota* : il est facile de construire un tel automate n'ayant qu'un seul état d'acceptation qui est égal à l'état d de départ).

Soit $G =< A \cup B, V, P >$ une grammaire algébrique sous forme normale quadratique et soit Q l'ensemble des états d'un automate fini déterministe dont on notera δ la fonction de transition : $\delta : Q \times (A \cup B) \longrightarrow Q$. On construit à partir de G une nouvelle grammaire $G' =< A \cup B, Q \times V \times Q, P' >$ où P' est constitué des règles :

- $(q, v, q'') \longrightarrow \Sigma_{q' \in Q}(q, v_1, q')(q', v_2, q'') \in P' \Longleftrightarrow v \longrightarrow v_1 v_2 \in P$
- $(q, v, q') \longrightarrow a \in P' \Longleftrightarrow v \longrightarrow a \in P$ et $\delta(q, a) = q'$.

Question 11 : Appliquer cette construction à la grammaire G de règles :
$S \longrightarrow XS + SX + YS + SY + ZS + SZ + UT$
$T \longrightarrow WH + a$
$H \longrightarrow SM$
$M \longrightarrow WU$
$X \longrightarrow x$
$Y \longrightarrow y$
$Z \longrightarrow z$
$U \longrightarrow a$
$W \longrightarrow b$
et à l'automate fini trouvé à la question précédente.

Question 12 : Montrer que pour tout $v \in V$, $L_{G'}((d,v,d)) = L_G(v) \cap K$.

IV — application d'un morphisme inverse

Soit φ le morphisme de B^* dans A^* défini par : $\varphi(x) = aba$, $\varphi(y) = ba$ et $\varphi(z) = ab$. On considère alors sur $A \cup B$ le langage rationnel $K = \{l\varphi(l) | l \in B\}^*$. Enfin, on considère les deux projections $\pi : (A \cup B)^* \longrightarrow A^*$ et $\psi : (A \cup B)^* \longrightarrow B^*$ définies par :
$\pi(a) = a$, $\pi(b) = b$ et $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = 1$
$\psi(a) = \psi(b) = 1$, $\psi(x) = x$, $\psi(y) = y$ et $\psi(z) = z$.

Question 13 : Démontrer que :
$\forall f \in A^*, \forall g \in B^*, \varphi(g) = f \Longleftrightarrow \exists w \in K$ tel que $\pi(w) = f$ et $\psi(w) = g$,
et donc que : $\forall L \subset A^*, \varphi^{-1}(L) = \psi(\pi^{-1}(L) \cap K)$.

Question 14 : Donner une grammaire algébrique engendrant le langage $\varphi^{-1}(L)$, où L est le langage algébrique défini dans la partie préliminaire.

Question subsidiaire : Au vu de ce qui a été fait sur cet exemple, expliquer comment faire pour établir le théorème annoncé :
L'image d'un langage algébrique par un homomorphisme inverse est un langage algébrique.