Le but de ce problème est de montrer sur un exemple que l'intersection d'un langage algébrique et d'un langage reconnaissable est un langage algébrique.

Partie 1

On note $Q = \{1, 2, 3, 4\}$, et on considère les deux applications de Q dans Q , notées $\bar{a}$ et $\bar{b}$, définies comme suit :

	<u>i</u>	<u>$\bar{a}(i)$</u>		<u>i</u>	<u>$\bar{b}(i)$</u>
	1	2		1	4
$\bar{a} :$	2	2	$\bar{b} :$	2	3
	3	4		3	3
	4	4		4	4

Question 1 : Dans le monoïde des applications de Q dans Q , on définit le produit de f par g , noté $f.g$, comme la composition de g par f (dans cet ordre), soit $f.g = g \circ f$. Calculer les deux applications $\bar{a}.\bar{a}$ et $\bar{b}.\bar{b}$.

	<u>i</u>	<u>$\bar{a}.\bar{a}(i)$</u>		<u>i</u>	<u>$\bar{b}.\bar{b}(i)$</u>
	1	2		1	4
$\bar{a}.\bar{a} :$	2	2	$\bar{b}.\bar{b} :$	2	3
	3	4		3	3
	4	4		4	4

On constate que $\bar{a}.\bar{a} = \bar{a}$ et que $\bar{b}.\bar{b} = \bar{b}$.

Question 2 : Calculer avec soin le monoïde M engendré par $\bar{a}$ et $\bar{b}$ (ce monoïde se compose de 5 applications, y compris l'application identité notée 1_M).

Ecrire la table de multiplication de ce monoïde.

Puisque $\bar{a}.\bar{a} = \bar{a}$ et $\bar{b}.\bar{b} = \bar{b}$, point n'est besoin de faire les produits qui comportent 2 lettres consécutives identiques.

	<u>1_M</u>	<u>$\bar{a}$</u>	<u>$\bar{b}$</u>	<u>$\bar{a}.\bar{b}$</u>	<u>$\bar{b}.\bar{a}$</u>
1	2	4	3	4	
2	2	3	3	4	
3	4	3	4	4	
4	4	4	4	4	

$\bar{b}.\bar{a}$ est absorbant, et comme tout produit de plus de 2 lettres contient soit aa , soit bb soit ba , il ne peut y avoir d'autre application.

La table de multiplication est donc :

1_M	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}.\bar{b}$	$\bar{b}.\bar{a}$
$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}.\bar{b}$	$\bar{a}.\bar{b}$	$\bar{b}.\bar{a}$
$\bar{b}$	$\bar{b}.\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{b}.\bar{a}$	$\bar{b}.\bar{a}$
$\bar{a}.\bar{b}$	$\bar{b}.\bar{a}$	$\bar{a}.\bar{b}$	$\bar{b}.\bar{a}$	$\bar{b}.\bar{a}$
$\bar{b}.\bar{a}$	$\bar{b}.\bar{a}$	$\bar{b}.\bar{a}$	$\bar{b}.\bar{a}$	$\bar{b}.\bar{a}$

Question 3 : Dans toute la suite, A désigne l'alphabet $A = \{a, b\}$. Soit φ le morphisme de A^* dans M défini par : $\varphi(a) = \bar{a}$ et $\varphi(b) = \bar{b}$. Que valent $\varphi^{-1}(1_M)$, $\varphi^{-1}(\bar{a})$, $\varphi^{-1}(\bar{b})$, $\varphi^{-1}(\bar{a}\bar{b})$, $\varphi^{-1}(\bar{b}\bar{a})$?

En déduire que le langage $R = a^+b^+$ est un langage reconnaissable.

$\varphi^{-1}(1_M) = \{w \in A^* \mid \varphi(w) = 1_M\}$. Sur la table on lit que seul le mot vide a une image qui vaut 1_M , donc $\varphi^{-1}(1_M) = \{1\}$.

De même, sur la table, on lit que seuls les produits de (au moins un) a par lui-même ont une image qui vaut $\bar{a}$, $\varphi^{-1}(\bar{a}) = a^+$. De même, $\varphi^{-1}(\bar{b}) = b^+$.

Egalement, $\varphi^{-1}(\bar{a}.\bar{b}) = a^+b^+$. Enfin tout mot qui a ba en facteur a pour image $\bar{b}.\bar{a}$, i.e. $\varphi^{-1}(\bar{b}.\bar{a}) = A^*.\{ba\}.A^*$.

Pour $P = \{\bar{a}.\bar{b}\} \subset M$, R s'écrit : $R = \varphi^{-1}(P)$ où $\varphi : A^* \rightarrow M$ est un morphisme de monoïdes, et M est fini, ce qui est la définition des reconnaissables.

Partie 2

Question 4 : On considère le système $\mathcal{S}$ composé d'une unique équation :

$$\{ S = aSbS + bSaS + 1$$

Combien de solutions admet ce système ? Calculer les approximations d'ordre 0, 1, 2 et 3 de la plus petite solution L de ce système. Que vaut L ? (sans donner une preuve formelle, on donnera une idée de comment la mener à bien).

Ce système est strict, il admet donc une unique solution.

L'approximant d'ordre 0 est $\emptyset$

L'approximant d'ordre 1 est $\{1\}$

L'approximant d'ordre 2 est $\{1, ab, ba\}$

L'approximant d'ordre 3 est $\{1, ab, ba, aabb, abab, baba, bbaa, abba, baab, aabbab, ababab, babaab, bbaaab, aabbba, ababba, bababa, bbaaba\}$

L est l'ensemble des mots qui ont le même nombre de a et de b . Chaque règle produisant autant de a que de b , on montrerait par induction que tout mot du langage possède le même nombre de a et de b . La réciproque (*nota* : elle est un peu plus délicate) se fait par récurrence sur la longueur des mots ayant le même nombre de a et de b : si f est un mot de longueur non nulle qui commence par exemple par a , soit f' le plus petit facteur gauche de f qui possède le même nombre de a et de b , f' se termine donc par b et f s'écrit $f = aubv$, où u comme v possède le même nombre de a et de b , et sont tous deux strictement plus courts que f .

Question 5 : Donner une grammaire algébrique propre qui engendre $L \setminus \{1\}$.

Pour rendre propre la grammaire $S \longrightarrow aSbS + bSaS + 1$ qui se déduit du système, il suffit de substituer dans le membre droit $S + 1$ à S :

$$S \longrightarrow a(S + 1)b(S + 1) + b(S + 1)a(S + 1) + 1$$

et de retirer la règle $S \longrightarrow 1$, soit en développant :

$$S \longrightarrow aSbS + abS + aSb + ab + bSaS + baS + bSa + ba.$$

Question 6 : Cette grammaire est-elle ambiguë ? (Justifiez votre réponse)

La grammaire $S \longrightarrow aSbS + bSaS + 1$ est ambiguë : le mot $abab$ est obtenu à partir de S par les deux dérivations gauches :

$$S \longrightarrow aSbS \longrightarrow abS \longrightarrow abaSbS \longrightarrow ababS \longrightarrow abab$$

$$S \longrightarrow aSbS \longrightarrow abSaSbS \longrightarrow abaSbS \longrightarrow ababS \longrightarrow abab$$

Nota : cette ambiguïté se transporte sur la grammaire propre calculée :

$$S \longrightarrow abS \longrightarrow abab \text{ et } S \longrightarrow aSb \longrightarrow abab$$

Question 7 : Donner une grammaire sous forme normale de Greibach pour $L \setminus \{1\}$. En déduire un automate à pile simple qui reconnaît $L \setminus \{1\}$ (par pile vide).

La grammaire propre obtenue ci-dessus est sous forme presque Greibach : tous ses membres droits sont dans $A.(A \cup \{S\})^*$. Pour la rendre sous forme de Greibach, il suffit d'introduire 2 non-terminaux v_a et v_b , d'ajouter les règles $v_a \longrightarrow a$ et $v_b \longrightarrow b$, et de substituer v_a et v_b à a et b dans les membres droits lorsqu'ils ne sont pas en tête :

$$\begin{cases} S \longrightarrow aSv_bS + av_bS + aSv_b + av_b + bSv_aS + bv_aS + bSv_a + bv_a \\ v_a \longrightarrow a \\ v_b \longrightarrow b \end{cases}$$

L'automate à pile simple s'en déduit directement :

$$\begin{cases} a, S \longrightarrow Sv_bS & b, S \longrightarrow Sv_aS \\ a, S \longrightarrow Sv_b & b, S \longrightarrow Sv_a \\ a, S \longrightarrow v_bS & b, S \longrightarrow v_aS \\ a, S \longrightarrow v_b & b, S \longrightarrow v_a \\ a, v_a \longrightarrow 1 & b, v_b \longrightarrow 1 \end{cases}$$

Partie 3

Si $\mathcal{A}$ est un automate à pile simple d'alphabet de pile Z , et de fonction de transition λ , et M un monoïde fini d'élément neutre 1_M , on définit l'automate à pile $\mathcal{A}_M$ par la machine à pile $\langle A, M, Z, \lambda' \rangle$ où $\lambda' = \{(x, m, z, h, m') \mid (x, z, h) \in \lambda, m \cdot \varphi(x) = m'\}$, et $(1_M, z_1)$ est la configuration interne de départ si z_1 est le symbole de départ de pile de $\mathcal{A}$, et $M \times \{1\}$ est l'ensemble des configurations internes de reconnaissance.

Question 8 : Calculer l'automate à pile $\mathcal{A}_M$ pour l'automate $\mathcal{A}$ trouvé en question précédente et le monoïde M de la question 2.

Les règles de l'automate à pile $\mathcal{A}_M$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{llll} a, S, 1_M, Sv_bS, \bar{a} & b, S, 1_M, Sv_aS, \bar{b} & a, S, \bar{a}, Sv_bS, \bar{a} & b, S, \bar{a}, Sv_aS, \bar{a}\bar{b} \\ a, S, 1_M, Sv_b, \bar{a} & b, S, 1_M, Sv_a, \bar{b} & a, S, \bar{a}, Sv_b, \bar{a} & b, S, \bar{a}, Sv_a, \bar{a}\bar{b} \\ a, S, 1_M, v_bS, \bar{a} & b, S, 1_M, v_aS, \bar{b} & a, S, \bar{a}, v_bS, \bar{a} & b, S, \bar{a}, v_aS, \bar{a}\bar{b} \\ a, S, 1_M, v_b, \bar{a} & b, S, 1_M, v_a, \bar{b} & a, S, \bar{a}, v_b, \bar{a} & b, S, \bar{a}, v_a, \bar{a}\bar{b} \\ a, v_a, 1_M, 1, \bar{a} & b, v_b, 1_M, 1, \bar{b} & a, v_a, \bar{a}, 1, \bar{a} & b, v_b, \bar{a}, 1, \bar{a}\bar{b} \\ a, S, \bar{b}, Sv_bS, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{b}, Sv_aS, \bar{b} & a, S, \bar{a}\bar{b}, Sv_bS, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{a}\bar{b}, Sv_aS, \bar{a}\bar{b} \\ a, S, \bar{b}, Sv_b, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{b}, Sv_a, \bar{b} & a, S, \bar{a}\bar{b}, Sv_b, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{a}\bar{b}, Sv_a, \bar{a}\bar{b} \\ a, S, \bar{b}, v_bS, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{b}, v_aS, \bar{b} & a, S, \bar{a}\bar{b}, v_bS, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{a}\bar{b}, v_aS, \bar{a}\bar{b} \\ a, S, \bar{b}, v_b, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{b}, v_a, \bar{b} & a, S, \bar{a}\bar{b}, v_b, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{a}\bar{b}, v_a, \bar{a}\bar{b} \\ a, v_a, \bar{b}, 1, \bar{b}\bar{a} & b, v_b, \bar{b}, 1, \bar{b} & a, v_a, \bar{a}\bar{b}, 1, \bar{b}\bar{a} & b, v_b, \bar{a}\bar{b}, 1, \bar{a}\bar{b} \\ a, S, \bar{b}\bar{a}, Sv_bS, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{b}\bar{a}, Sv_aS, \bar{b}\bar{a} & & \\ a, S, \bar{b}\bar{a}, Sv_b, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{b}\bar{a}, Sv_a, \bar{b}\bar{a} & & \\ a, S, \bar{b}\bar{a}, v_bS, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{b}\bar{a}, v_aS, \bar{b}\bar{a} & & \\ a, S, \bar{b}\bar{a}, v_b, \bar{b}\bar{a} & b, S, \bar{b}\bar{a}, v_a, \bar{b}\bar{a} & & \\ a, v_a, \bar{b}\bar{a}, 1, \bar{b}\bar{a} & b, v_b, \bar{b}\bar{a}, 1, \bar{b}\bar{a} & & \end{array} \right.$$

Question 9 : Comment choisir les configurations de reconnaissance pour que $\mathcal{A}_M$ reconnaisse $L \cap R$?

$\mathcal{A}_M$ se sert de sa pile pour reconnaître par pile vide L , et de ses états pour calculer l'image par φ du mot lu. Comme un mot $f \in R \iff \varphi(f) = \bar{a}\bar{b}$, il suffit de prendre pour configurations de reconnaissance l'ensemble $K = \{(\bar{a}\bar{b}, 1)\}$.

Partie 4

Soit $V' = \{S_m \mid m \in M\}$ un ensemble en bijection avec $\{S\} \times M$ (où M est toujours le monoïde défini à la question 2). On prolonge φ en un morphisme de $(A \cup V')^*$ dans M en posant $\forall m \in M, \varphi(S_m) = m$, et on définit le morphisme π de $(A \cup V')^*$ dans $(A \cup \{S\})^*$ en posant : $\forall m \in M, \pi(S_m) = S$ et $\forall a \in A, \pi(a) = a$.

Question 10 : Donner 5 mots $w \in (A \cup V')^*$ tels que $\pi(w) = aSbS$. Donner 5 mots $w \in (A \cup V')^*$ tels que $\varphi(w) = \bar{a}\bar{b}$. Donner tous les mots $w \in (A \cup V')^*$ tels que $\pi(w) = aSbS$ et $\varphi(w) = \bar{a}\bar{b}$.

Les mots $aS_{1_M}bS_{1_M}, aS_{1_M}bS_{\bar{a}}, aS_{\bar{a}}bS_{\bar{a}}, aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{1_M}, aS_{\bar{b}}bS_{\bar{a}}$ ont pour image par π le mot $aSbS$.

Les mots $ab, S_{\bar{a}}S_{\bar{b}}, aS_{1_M}bS_{1_M}, aS_{\bar{a}}S_{\bar{b}}b, S_{1_M}S_{1_M}aaaS_{\bar{a}\bar{b}}bb$ ont pour image par φ l'application $\bar{a}\bar{b}$.

L'ensemble des mots tels que $\pi(w) = aSbS$ et $\varphi(w) = \bar{a}\bar{b}$ vaut : $\{aS_{1_M}bS_{1_M}, aS_{1_M}bS_{\bar{b}}, aS_{\bar{a}}bS_{1_M}, aS_{\bar{a}}bS_{\bar{b}}, aS_{\bar{b}}bS_{1_M}, aS_{\bar{b}}bS_{\bar{b}}, aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{1_M}, aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{\bar{b}}\}$.

Notation : on écrit $w \in \delta_{\mathcal{S}}(x)$ pour dire que w est dans le membre droit d'une équation d'un système $\mathcal{S}$ ayant x pour membre gauche.

On construit à partir de $\mathcal{S}$ un nouveau système $\mathcal{S}'$, dont les variables sont des éléments de V' , et les équations sont définies par :

- $aS_{m_1}bS_{m_2} \in \delta_{S'}(S_m) \iff aSbS \in \delta_S(S)$ et $m = \varphi(a)m_1\varphi(b)m_2$
- $bS_{m_1}aS_{m_2} \in \delta_{S'}(S_m) \iff bSaS \in \delta_S(S)$ et $m = \varphi(b)m_1\varphi(a)m_2$
- $1 \in \delta_{S'}(S_m) \iff 1 \in \delta_S(S)$ et $m = \varphi(1) = 1_M$

Ceci se résume par la formule générale :

$$\{ \forall m \in M \quad S_m = \{w \in (A \cup V')^* \mid \pi(w) \in \delta_S(S) \text{ et } \varphi(w) = m\}$$

Autrement dit, si $m \neq \varphi(1)$, l'équation ayant S_m pour membre gauche est :

$$S_m = \Sigma_{m=\varphi(a)m_1\varphi(b)m_2} aS_{m_1}bS_{m_2} + \Sigma_{m=\varphi(b)m_1\varphi(a)m_2} bS_{m_1}aS_{m_2}$$

Si $m = \varphi(1)$, l'équation ayant S_m pour membre gauche est :

$$S_m = \Sigma_{m=\varphi(a)m_1\varphi(b)m_2} aS_{m_1}bS_{m_2} + \Sigma_{m=\varphi(b)m_1\varphi(a)m_2} bS_{m_1}aS_{m_2} + 1$$

Question 11 : Construire S' en calculant explicitement les équations issues de S_m pour tous les m de M . (Certains de ces ensembles peuvent éventuellement être vides).

Remarquons que $\forall m_1, m_2 \in M, \varphi(a)m_1\varphi(b)m_2 = \bar{a}\bar{b}$ ou $\varphi(a)m_1\varphi(b)m_2 = \bar{b}\bar{a}$ et $\forall m_1, m_2 \in M, \varphi(b)m_1\varphi(a)m_2 = \bar{b}\bar{a}$. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{1_M} = 1 \\ S_{\bar{a}\bar{b}} = aS_{1_M}bS_{1_M} + aS_{1_M}bS_{\bar{b}} + aS_{\bar{a}}bS_{1_M} + aS_{\bar{a}}bS_{\bar{b}} + aS_{\bar{b}}bS_{1_M} + aS_{\bar{b}}bS_{\bar{b}} + \\ \quad aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{1_M} + aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{\bar{b}} \\ S_{\bar{b}\bar{a}} = aS_{1_M}bS_{\bar{a}} + aS_{1_M}bS_{\bar{a}\bar{b}} + aS_{1_M}bS_{\bar{b}\bar{a}} + aS_{\bar{a}}bS_{\bar{a}} + aS_{\bar{a}}bS_{\bar{a}\bar{b}} + aS_{\bar{a}}bS_{\bar{b}\bar{a}} + \\ \quad aS_{\bar{b}}bS_{\bar{a}} + aS_{\bar{b}}bS_{\bar{a}\bar{b}} + aS_{\bar{b}}bS_{\bar{b}\bar{a}} + aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{\bar{a}} + aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{\bar{a}\bar{b}} + aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{\bar{b}\bar{a}} + \\ \quad aS_{\bar{b}\bar{a}}bS_{1_M} + aS_{\bar{b}\bar{a}}bS_{\bar{a}} + aS_{\bar{b}\bar{a}}bS_{\bar{b}} + aS_{\bar{b}\bar{a}}bS_{\bar{a}\bar{b}} + aS_{\bar{b}\bar{a}}bS_{\bar{b}\bar{a}} \end{array} \right.$$

toutes les autres variables donnant un ensemble vide.

Question 12 : Ecrire la grammaire algébrique correspondante. La réduire vis-à-vis de $S_{\bar{a}\bar{b}}$

La grammaire algébrique correspondante s'obtient en remplaçant les symboles d'égalité par des flèches.

La variable $S_{\bar{b}\bar{a}}$ n'est pas atteinte à partir de $S_{\bar{a}\bar{b}}$. Il reste donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{1_M} \longrightarrow 1 \\ S_{\bar{a}\bar{b}} \longrightarrow aS_{1_M}bS_{1_M} + aS_{\bar{a}\bar{b}}bS_{1_M} \end{array} \right.$$

Question 13 : Si v est une variable du système S' , on notera $L_{S'}(v)$ la composante correspondant à cette variable de la plus petite solution de ce système. Montrer par récurrence que, si $f \in L_{S'}(S_{\varphi(u)})$, alors $f \in [u]$.

Hypothèse de récurrence : $\forall u \in A^*, \forall f \in L_{S'}(S_{\varphi(u)}), |f| \leq n \implies f \in [u]$.

– pour $n = 0$, i.e. $f = 1$, $f \in L_{S'}(S_{\varphi(u)}) \implies \varphi(u) = 1_M$ et comme $\varphi^{-1}(1_M) = \{1\}$, $u = 1$, et donc $f \in [u]$.

– soit f de longueur $n + 1$, tel que $f \in L_{S'}(S_{\varphi(u)})$. On a $S_{\varphi(u)} \xrightarrow{*} f$ qui est une

dérivation qui commence par la règle $S_{\varphi(u)} \longrightarrow aS_{m_1}bS_{m_2}$ avec $\varphi(u) = \bar{a}m_1\bar{b}m_2$. D'après le lemme fondamental, f s'écrit $agbh$ avec $g \in L_{\mathcal{S}'}(m_1)$ et $h \in L_{\mathcal{S}'}(m_2)$. g et h vérifient l'hypothèse de récurrence, et donc $\varphi(g) = m_1$ et $\varphi(h) = m_2$, d'où $\varphi(f) = \varphi(a)\varphi(g)\varphi(b)\varphi(h) = \bar{a}m_1\bar{b}m_2 = \varphi(u)$, et $f \in [u]$.

Considérant le rationnel R de la question 3 qui s'écrit $\varphi^{-1}(P)$ pour $P \subset M$, on construit $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ à partir de $\mathcal{S}'$ en ajoutant une nouvelle variable s et l'équation : $s = \Sigma_{m \in P} S_m$. Si v est une variable du système $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$, on notera $L_{\mathcal{S}_{\mathcal{R}}}(v)$ la composante correspondant à cette variable de la plus petite solution de ce système.

Question 14 : Dédurre de ce qui précède que $L_{\mathcal{S}_{\mathcal{R}}}(s) = L \cap R$.

Si $R = \varphi^{-1}(P)$ pour $P \subset M$, on définit $R_m = \varphi^{-1}(m)$ pour $m \in P$, et l'on a $R = \cup_{m \in P} R_m$, et donc $L \cap R = \cup_{m \in P} (L \cap R_m)$.

A la question précédente, nous avons montré que dans $\mathcal{S}'$ une variable S_m engendre $L_G(S) \cap \varphi^{-1}(m)$; la grammaire issue du système $\mathcal{S}'$ engendre l'union pour $m \in P$ de ces langages, donc $L_G(S) \cap R = L \cap R$.

Question subsidiaire : Au vu de ce qui a été fait sur cet exemple, expliquer comment faire pour établir le théorème annoncé :

L'intersection d'un langage algébrique et d'un langage reconnaissable est un langage algébrique.

En partie 2, nous avons vu une construction qui, à partir d'un automate à pile reconnaissant un langage algébrique L et du monoïde de transition d'un automate fini qui reconnaît un langage reconnaissable K , donne un automate à pile reconnaissant $L \cap K$. Pour montrer la proposition, il suffirait de faire cette construction dans le cas général.

En partie 3, nous avons vu une construction qui, à partir d'une grammaire algébrique engendrant un langage algébrique L et du monoïde de transition d'un automate fini qui reconnaît un langage reconnaissable K , donne une grammaire algébrique engendrant $L \cap K$. Pour montrer la proposition, il suffirait de faire cette construction dans le cas général.

Comment peut-on établir le théorème :

L'intersection d'un langage algébrique non-ambigu et d'un langage reconnaissable est un langage algébrique non-ambigu.

Il suffit de vérifier que dans la deuxième construction, si l'on part d'une grammaire non-ambiguë, on obtient une grammaire non-ambiguë.

Comment peut-on établir le théorème :

L'intersection d'un langage algébrique déterministe et d'un langage reconnaissable est un langage algébrique déterministe.

Il suffit de vérifier que dans la première construction, si l'on part d'un automate déterministe, on obtient un automate déterministe.