L3 Informatique

Année 2010-2011

Partiel de Logique
éléments de corrections

corrigé partiel et non officiel,
à lire d'un œil critique

Exercice 1 : Système de Gentzen

Pour les rappels sur le système de Gentzen, voir aussi poly de cours n°2 et la correction du TD3 de 2008-2009.

Proposition 1

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q, p \vdash q, p}{q \vdash p \to q, p}\,(\to d) \qquad p, q \vdash p}{(p \to q) \to p, q \vdash p}\,(\to g)}{(p \to q) \to p \vdash q \to p}\,(\to d)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to (q \to p)}\,(\to d)$$

Axiomes en bleu

Prochain symbole supprimé en rouge

Proposition 2

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q, p \vdash p, r}{q \vdash p, \neg p, r}\,(\neg d) \qquad \dfrac{\dfrac{q, \vdash q, p, r \qquad q, r \vdash p, r}{q, q \to r \vdash p, r}\,(\to g)}{q \vdash p, \neg(q \to r), r}\,(\neg d)}{q \vdash p, \neg p \wedge \neg(q \to r), r}\,(\wedge d)}{\vdash p, \neg q, \neg p \wedge \neg(q \to r), r}\,(\neg d)}{\vdash p \vee \neg q, \neg p \wedge \neg(q \to r), r}\,(\vee d)}{\neg(p \vee \neg q) \vdash \neg p \wedge \neg(q \to r), r}\,(\neg g)}{\neg(p \vee \neg q) \vdash (\neg p \wedge \neg(q \to r)) \vee r}\,(\vee d)}{\vdash \neg(p \vee \neg q) \to ((\neg p \wedge \neg(q \to r)) \vee r)}\,(\to d)$$

(Exercice 2 non traité pour l'instant)

Problème

Partie A : Sémantique du calcul propositionnel

Question 1

Méthode

Pour éviter de se tromper, il est conseillé de faire une colonne intermédiaire (voire plusieurs) avec une partie de la formule.

p	q	$q \oplus p$	$p \oplus (q \oplus p)$
F	F	F	
F	V	V	
V	F	V	
V	V	F	

Puis cette colonne permet de compléter la table de la formule :

p	q	$q \oplus p$	$p \oplus (q \oplus p)$
F	F	F	F
F	V	V	V
V	F	V	F
V	V	F	V

Correction

p	q	$q \oplus p$	$p \oplus (q \oplus p)$
F	F	F	F
F	V	V	V
V	F	V	F
V	V	F	V

Remarque : Cette formule est équivalente à : q

p	q	$\neg p$	$(\neg p \wedge q)$	$(\neg p \wedge q) \oplus p$
F	F	V	F	F
F	V	V	V	V
V	F	F	F	V
V	V	F	F	V

Remarque : Cette formule est équivalente à : $p \vee q$

p	q	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$p \oplus (p \wedge \neg q)$
F	F	V	F	F
F	V	F	F	F
V	F	V	V	F
V	V	F	F	V

Remarque : Cette formule est équivalente à : $p \wedge q$

Question 2

Méthode

Par définition du XOR si on la connaît, ou par lecture de la table de vérité sinon : $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.
Puisqu'on ne donne que la table de vérité de XOR comme définition, on ne peut prouver l'équivalence des 2 formules qu'en comparant leurs tables de vérité.

Correction

$A = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

p	q	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
F	F	F	F	F
F	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	V	F	F	F

La table de vérité de A est bien la même que celle de $p \oplus q$, donc $A \equiv p \oplus q$.

Question 3

Correction

D'après la réponse précédente, toute occurrence de $(C \oplus D)$ dans une formule peut donc être transformée en $((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))$ sans changer la valeur de la formule.
Donc pour toute formule A contenant une ou plusieurs partie de la forme $(C \oplus D)$, on peut écrire une formule B équivalente en remplaçant ces parties par $((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))$. Cette formule B équivalente à A ne contiendra donc aucun connecteur $\oplus$.

Partie B : Déduction Naturelle

Pour les rappels sur le système de Déduction Naturelle, voir aussi poly de cours n°2 et la correction du TD2 de 2008-2009.

Question 1

Correction

Proposition (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p, p\oplus q \vdash p\oplus q \qquad \neg p, p\oplus q \vdash \neg p}{\neg p, p\oplus q \vdash q}\ (\oplus e)}{\neg p \vdash (p\oplus q) \to q}\ (\to i)}{\vdash \neg p \to ((p\oplus q) \to q)}\ (\to i)$$

Proposition (b)

Surlignons les longs passages qui se répètent souvent pour plus de lisibilité

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(p \lor q), p\oplus q \vdash p\oplus q \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(p \lor q), p\oplus q, p \vdash p}{\neg(p \lor q), p\oplus q, p \vdash p \lor q}\ (\lor i) \qquad \neg(p \lor q), p\oplus q, p \vdash \neg(p \lor q)}{\neg(p \lor q), p\oplus q \vdash \neg p}\ (\neg i)}{\neg(p \lor q), p\oplus q \vdash q}\ (\oplus e)}{\neg(p \lor q) \vdash (p\oplus q) \to q}\ (\to i)}{\vdash \neg(p \lor q) \to ((p\oplus q) \to q)}\ (\to i)$$

Proposition (c)

Notons $\Delta = p \to \neg q, \neg p \to q$ pour alléger l'écriture

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta, p \vdash p \qquad \Delta, p \vdash p \to \neg q}{p \to \neg q, \neg p \to q, p \vdash \neg q}\ (\to e) \qquad \dfrac{\Delta, \neg p \vdash \neg p \qquad \Delta, \neg p \vdash \neg p \to q}{p \to \neg q, \neg p \to q, \neg p \vdash q}\ (\to e)}{p \to \neg q, \neg p \to q \vdash p\oplus q}\ (\oplus i)}{p \to \neg q \vdash (\neg p \to q) \to (p\oplus q)}\ (\to i)}{\vdash (p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to (p\oplus q))}\ (\to i)$$

Proposition (d)

$$\dfrac{\dfrac{p\oplus q, q \vdash \neg p^{(1)} \qquad p\oplus q, \neg q \vdash p^{(2)}}{p\oplus q \vdash q\oplus p}\ (\oplus i)}{\vdash (p\oplus q) \to (q\oplus p)}\ (\to i)$$

(1) :

$$\dfrac{\dfrac{p\oplus q, p, q \vdash p\oplus q \qquad p\oplus q, p, q \vdash p}{p\oplus q, p, q \vdash q}\ (\oplus e) \qquad p\oplus q, p, q \vdash \neg q}{p\oplus q, q \vdash \neg p}\ (\neg i)$$

(2) :

$$\dfrac{\dfrac{p\oplus q, \neg p, \neg q \vdash \neg q \qquad \dfrac{p\oplus q, \neg p, \neg q \vdash p\oplus q \qquad p\oplus q, \neg p, \neg q \vdash \neg p}{p\oplus q, \neg p, \neg q \vdash q}\ (\oplus e)}{p\oplus q, \neg q \vdash \neg\neg p}\ (\neg i)}{p\oplus q, \neg q \vdash p}\ (\neg\neg e)$$

Question 2

Correction

Règle (a)

$$\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \dfrac{\Delta \vdash (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)}{\Delta \vdash A \rightarrow \neg B}\,(\wedge e)}{\Delta \vdash \neg B}\,(\rightarrow e)$$

Hypothèse 1
Hypothèse 2

On a ainsi prouvé que si $\Delta \vdash A$ et $\Delta \vdash (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)$ sont dérivables, alors $\Delta \vdash \neg B$ est aussi dérivable.
Donc la règle (a) est admissible dans DN_{prop}.
De même pour les autres règles :

Règle (b)

$$\dfrac{\Delta \vdash \neg A \qquad \dfrac{\Delta \vdash (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)}{\Delta \vdash \neg A \rightarrow B}\,(\wedge e)}{\Delta \vdash B}\,(\rightarrow e)$$

Règle (c)

$$\dfrac{\dfrac{\Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash A \rightarrow \neg B}\,(\rightarrow i) \qquad \dfrac{\Delta, \neg A \vdash B}{\Delta \vdash \neg A \rightarrow B}\,(\rightarrow i)}{\Delta \vdash (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)}\,(\wedge i)$$

Question 3 :

Idem partie A, questions 2 et 3.

Question 4

Correction

Pour chaque preuve d'une formule A dans $DN^{\oplus}{}_{prop}$, il existe une preuve équivalente dans DN_{prop} d'une formule B équivalente à A sans XOR : chaque occurrence de la première règle ($\oplus e$) est remplacée par la règle (a) (ou sa dérivation équivalente en 2 étapes vue ci-dessus), chaque occurrence de la seconde règle ($\oplus e$) est remplacée par la règle (b), et chaque occurrence de la règle ($\oplus i$) est remplacée par la règle (c).

Partie C : Système de Hilbert

Pour les rappels sur le système de Hilbert, voir aussi poly de cours n°2 et la correction du TD2 de 2008-2009.

Question 1

Méthode

Ici, l'énoncé est ambiguë : « les trois règle précédentes » = ($\oplus e$), ($\oplus e$) et ($\oplus i$), ou alors (a), (b) et (c) ?
Comme la question 2 utilise un XOR, supposons qu'il s'agisse de ($\oplus e$), ($\oplus e$) et ($\oplus i$).
Cherchons a comprendre ce que dit la première règle ($\oplus e$) pour en déduire un axiome (rappelons que la grande barre horizontale peut se voir comme une implication de haut en bas).

$$\frac{\Delta \vdash A \oplus B \qquad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \neg B}\ (\oplus e)$$

Concrètement, elle dit que si on a $A \oplus B$ et A, alors on a $\neg B$.
Retraduisons cette phrase en logique : $((A \oplus B) \wedge A) \rightarrow \neg B$.
On obtient ainsi notre premier axiome, et on procède de la même façon avec les autres formules.

Correction

Axiome A : $((A \oplus B) \wedge A) \rightarrow \neg B$
Axiome B : $((A \oplus B) \wedge \neg A) \rightarrow B$
Axiome C : $((A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow (A \oplus B)$

Question 2

Correction

D'après le théorème de la déduction :

$$\vdash \neg p \rightarrow ((p\oplus q) \rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vdash (p\oplus q) \rightarrow q$$
$$\Leftrightarrow \quad \neg p, p\oplus q \vdash q$$

Montrons donc q avec $\neg p$ et $p\oplus q$ comme hypothèses :

$$\dfrac{\dfrac{\neg p \qquad \dfrac{p\oplus q \qquad (p\oplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow ((p\oplus q) \wedge \neg p))}{\neg p \rightarrow ((p\oplus q) \wedge \neg p)}}{(p\oplus q) \wedge \neg p} \qquad ((p\oplus q) \wedge \neg p) \rightarrow q}{q}$$

Hypothèse 1
Hypothèse 2
Axiome B
Axiome 3

source : http://info.paris7.free.fr
Questions, commentaires, critiques, remarques, etc : phosphore85@gmail.com