

Logique – Partiel (durée : 2h30)

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de lire le sujet.

Rédigez chaque exercice sur une feuille séparable.

Exercice 1 [Dédution Naturelle] Dans la suite, les symboles $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{p}$ représentent des lettres propositionnelles et A, B, C, D, E des formules quelconques. On utilise $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$ pour dire que le séquent $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop} , c'est à dire qu'il existe un arbre de preuve ayant comme racine le séquent $\Delta \vdash A$ dans le système DN_{prop} .

Dans la suite vous pouvez utiliser les résultats d'une question dans les suivantes même si vous n'êtes pas parvenu à la démontrer. Par contre, vous ne pouvez pas utiliser le fait que le système DN_{prop} est complet.

1. (a) Montrez que $\vdash_{DN_{prop}} ((A \wedge B) \vee E) \rightarrow (A \vee E)$.
 (b) Montrez que $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A \rightarrow B$ et $\Delta \vdash_{DN_{prop}} B \rightarrow C$ impliquent $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A \rightarrow C$.
 (c) Supposez $\vdash_{DN_{prop}} (A \vee (C \wedge D)) \rightarrow A \vee C$. En utilisant les deux derniers résultats, montrez $\vdash_{DN_{prop}} ((\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})) \rightarrow (\mathbf{a} \vee \mathbf{c})$.
2. (a) Montrez $(\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p}) \vdash_{DN_{prop}} \mathbf{p}$ et $(\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p}) \vdash_{DN_{prop}} \neg \mathbf{p}$.
 (b) Déduisez-en que $\vdash_{DN_{prop}} \neg(\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p})$.

Exercice 2 [Système \mathcal{G}] Dans la suite, les symboles $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ représentent des lettres propositionnelles.

1. Pour chacun des séquents suivants, utiliser les règles du système \mathcal{G} pour trouver soit une dérivation du séquent, soit une interprétation qui le falsifie.
 - (a) $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \vdash \mathbf{p}$
 - (b) $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p} \vdash \neg \mathbf{p} \rightarrow \neg \mathbf{q}$
 - (c) $\vdash (\mathbf{r} \rightarrow \neg \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{s}$
 - (d) $\vdash (\mathbf{r} \rightarrow \neg \mathbf{r}) \rightarrow \neg \mathbf{r}$
2. Utiliser les règles du système \mathcal{G} pour trouver une interprétation qui falsifie le séquent $(\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{s} \vdash \mathbf{p}$. Combien d'autres interprétations différentes le falsifient? Justifiez.
3. Donner une dérivation du séquent $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r} \vdash \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$ dans le système \mathcal{G} . Combien d'autres il y en a-t-il? Justifiez.

Exercice 3 [Calcul des Prédicats] Soit Σ la signature suivante du calcul des prédicats :

- $H/1, F/1$ des symboles de prédicat unaire,
- $E/2, A/2$ des symboles de prédicat binaire,
- $a/0, b/0$ des symboles de fonction 0-aire (c'est-à-dire des constantes),
- $p/1$ un symbole de fonction unaire.

1. Est-ce que les chaînes des caractères suivantes sont des formules ? Si la réponse est *non*, expliquez pourquoi.

(a) $H(A(x, y)) \wedge F(x)$

(b) $F(p(p(a)))$

(c) $\neg \exists H(x, y, z)$

(d) $b \wedge a$

2. Considérez la formule suivante du calcul des prédicats :

$$\Phi = \neg \forall x (E(z, x) \wedge A(x, y)) \Rightarrow \exists w (E(w, y) \wedge H(p(w)))$$

Pour chacune des substitutions σ_i suivantes, évaluez $\sigma_i(\Phi)$.

(a) $\sigma_1 = \{y/p(y), z/a\}$,

(b) $\sigma_2 = \{x/a, y/p(a), z/p(p(a))\}$,

(c) $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$

3. Prenez comme domaine d'interprétation l'ensemble des êtres humains et supposez que

- $H(x)$ signifie « x est un homme », $F(x)$ signifie « x est une femme »,
- $E(x, y)$ signifie « x est un enfant de y », $A(x, y)$ signifie « x est un ancêtre de y »,
- a dénote Adam, le premier homme, b dénote mon voisin Bruno,
- $p(x)$ dénote le père de x.

Formalisez les phrases suivantes.

(a) Tout le monde a un père et une mère.

(b) Le père du père de Bruno est une femme.

(c) Adam est l'ancêtre de tous les hommes, mais pas de toutes les femmes.

(d) Chaque personne est l'enfant de son père.

4. Exprimez en français les formules suivantes (attention : elle peuvent être fausses).

(a) $\forall x \forall y (E(x, y) \Rightarrow \neg H(x))$,

(b) $\forall x \exists y (A(y, x) \wedge F(y))$,

(c) $\neg \exists x E(a, x)$,

(d) $\exists x E(x, p(b))$.