

## Logique – Partiel (durée : 3h)

*Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits*

*Il est recommandé de lire le sujet*

### Exercice 1 : Calcul propositionnel

Dans ma mallette de peintre, j'ai des tubes de peinture. Les couleurs dont je dispose sont parmi les suivantes : rouge, jaune, bleu, orange, gris, noir. On désignera par :

- $R$  la proposition : « j'ai du rouge » (= « j'ai un tube de rouge ») ;
- $J$  la proposition : « j'ai du jaune » ;
- $B$  la proposition : « j'ai du bleu » ;
- $O$  la proposition : « j'ai du orange » ;
- $G$  la proposition : « j'ai du gris » ;
- $N$  la proposition : « j'ai du noir ».

1. Écrire sous la forme d'une formule chacune des affirmations suivantes :
  - (a) Je n'ai pas de jaune ;
  - (b) Si j'ai du rouge, alors je n'ai ni noir ni gris ;
  - (c) Des trois couleurs : bleu, jaune et rouge, j'en ai au moins deux ;
  - (d) Des deux couleurs : gris et orange, j'en ai exactement une.
2. On suppose que les quatre affirmations ci-dessus sont vraies. Est-il possible d'en déduire le contenu exact de ma mallette? Si oui, donner ce contenu. Dans tous les cas, on justifiera le raisonnement.
3. On suppose maintenant que l'on a  $n$  couleurs possibles, avec  $n \geq 2$ . On désigne par  $C_i$  la proposition : « j'ai un tube de la couleur  $i$  » (en supposant les couleurs numérotées de 1 à  $n$ ). Les trois formules ci-dessous nous donnent des conditions sur le nombre de couleurs que j'ai. Donnez pour chacune d'entre elles son équivalent en français.

$$(a) \bigvee_{1 \leq i \leq n} C_i \qquad (b) \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (C_i \wedge C_j) \qquad (c) \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} (C_i \Rightarrow \neg C_j)$$

(On rappelle que  $\bigvee_{1 \leq i \leq n} C_i$  désigne la formule  $C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n$ , etc.)

4. Montrer (de préférence sans tables de vérité) que la formule  $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)) \Rightarrow \neg p$  est équivalente à la formule  $p \Rightarrow (\neg q \vee r)$ .

### Exercice 2 : Preuves syntaxiques

1. Donnez dans le système  $\mathcal{G}$  une dérivation de chacun des deux séquents suivants :

$$(a) \quad p \wedge (q \Rightarrow r), q \vee \neg p \vdash r \qquad (b) \quad \vdash (\neg(p \Rightarrow q)) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$$

2. Donnez une dérivation du séquent suivant dans le système  $\mathcal{G}$ , puis une autre dérivation du même séquent en déduction naturelle :

$$\vdash (p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg(p \Rightarrow q))$$

3. Dans cette question, il s'agit de démontrer le lemme d'affaiblissement, dont on rappelle l'énoncé (vu en cours) :

**Lemme (affaiblissement).** — Soient  $\Delta, \Gamma$  deux ensembles de formules et  $A$  une formule. Si dans le système  $\mathcal{G}$  on a une dérivation  $\pi$  du séquent  $\Delta \vdash \Gamma$ , alors on peut trouver dans ce même système une dérivation  $\pi'$  du séquent  $\Delta, A \vdash \Gamma$  ainsi qu'une dérivation  $\pi''$  du séquent  $\Delta \vdash A, \Gamma$ .

La démonstration de ce lemme peut s'effectuer par induction. Rédigez-en les cas-clés.

### Exercice 3 : Calcul des prédicats (syntaxe et sémantique)

Soit  $\Sigma$  la signature comprenant les symboles suivants :

- un symbole de prédicat unaire  $P$ ,
- un symbole de prédicat binaire  $D$ ,
- un symbole de fonction 0-aire  $a$  (c'est-à-dire une constante),
- un symbole de fonction unaire  $s$ .

Soit  $\mathcal{I}$  l'interprétation de domaine  $\mathbb{N}$  (l'ensemble des entiers naturels) définie par :

- $\mathcal{I}(a) = 0$ ,
- $\mathcal{I}(s) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction successeur, c'est-à-dire  $\mathcal{I}(s)(n) = n + 1$ ,
- $\mathcal{I}(P) \subset \mathbb{N}$  est l'ensemble des nombres pairs,
- $\mathcal{I}(D) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est la relation « est double de », définie pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$  par

$$(n, m) \in \mathcal{I}(D) \quad \text{si et seulement si} \quad n = 2 * m.$$

1. Considérez la formule du calcul des prédicats suivante :

$$\Phi = \exists x(P(y) \wedge D(z, x) \wedge D(x, y)) \Rightarrow \neg \exists w(D(w, y) \wedge P(s(w)))$$

Pour chacune des substitutions  $\sigma_i$  suivantes, évaluez  $\sigma_i(\Phi)$ .

- (a)  $\sigma_1 = \{y/s(y), z/s(a)\}$ ,
  - (b)  $\sigma_2 = \{x/a, y/s(a), z/s(s(a))\}$ ,
  - (c)  $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ .
2. En utilisant l'interprétation  $\mathcal{I}$  définie ci-dessus, traduisez les énoncés suivants en formules du calcul des prédicats :
- (a) Si un nombre n'est pas pair, alors son successeur l'est ;
  - (b) Si un nombre est pair, alors il est le double d'un nombre ;
  - (c) 3 est pair.
3. Dites si l'interprétation  $\mathcal{I}$  satisfait les formules suivantes :
- (a)  $\forall x \forall y(D(x, y) \Rightarrow \neg P(s(x)))$ ,
  - (b)  $\forall x \exists y(D(x, y) \wedge P(y))$ ,
  - (c)  $\forall x(P(s(a)) \Rightarrow P(x))$ ,
  - (d) la formule  $\Phi$ .

Justifiez vos réponses.