Université Paris Diderot - L3 Informatique 15 Juin 2009

Logique – Examen de rattrapage

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1 [Calcul Propositionnel - Déduction Naturelle] On considère un langage propositionnel où p, q, r sont des lettres propositionnelles. En utilisant la déduction naturelle démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $F_1 = (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$.
2. $F_2 = (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$.

Exercice 2 [Calcul des Prédicats - Formalisation] On considère les symboles de prédicats $\Sigma_P = \{V/1, C/1, P/1, E/1, A/2\}$ où :

$V(x)$:	" x entre en voiture dans l'usine"
$C(x)$:	" x possède une carte"
$P(x)$:	" x est membre du personnel de l'usine"
$E(x)$:	" x est ouvrier"
$A(x,y)$:	" x est accompagné par y"

Traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

1. Toutes les personnes qui entrent en voiture dans l'usine doivent avoir une carte ou être accompagnées par un membre du personnel.
2. Il y a des ouvriers qui entrent en voiture dans l'usine sans être accompagnés de personnes qui ne sont pas des ouvriers.
3. Aucun ouvrier n'a de carte.
4. Il y a des ouvriers qui sont membres du personnel.

Exercice 3 [Calcul des Prédicats - Système de Gentzen] On considère un langage du premier ordre, où $B/0, A/2, R/2$ sont des symboles de prédicat. En utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats, démontrer que le séquent suivante est prouvable :

$$\forall z' \ A(z, z') \wedge \neg B \vdash [\exists x \ \forall y \ (R(y,x) \rightarrow A(x,y))]$$

Exercice 4 [Calcul des Prédicats - Résolution] On considère un langage du premier ordre, où $A/2, B/2$ sont des symboles de prédicat. En appliquant la méthode de résolution (forme prénexe, Skolemisation, forme normale conjonctive, forme clausale), montrer que la formule suivante est valide.

$$[\forall y \ (\exists x \ A(y,x) \wedge \exists x \ \neg B(y,x))] \rightarrow \exists z \ \exists y \ \exists w \ \neg(\neg A(z,y) \vee B(z,w))$$

Exercice 5 [Calcul des prédicats - Sémantique] On considère un langage du premier ordre $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0, b/0\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{R/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat. On veut construire une interprétation $\mathcal{I}$ ayant comme domaine l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ et telle que $\mathcal{I}(a) = 1$, $\mathcal{I}(b) = 2$.

A. Pour chacune des formules A_i, complétez $\mathcal{I}$ en donnant un prédicat pour le symbole R afin d'obtenir un modèle de A_i. Justifiez votre réponse.

B. Pour chacune des formules A_i, complétez $\mathcal{I}$ en donnant un prédicat pour le symbole R afin de falsifier la formule A_i. Justifiez votre réponse.

- $A_1 = \forall x\, R(x,x)$
- $A_2 = A_1 \rightarrow \forall x\, \forall y\, [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)]$
- $A_3 = [\exists x\, \forall y\, R(x,y)] \rightarrow A_2$