Examen modifié

Université Paris Diderot - L3 Informatique 14 Mai 2008

Logique – Examen final (durée 3h)

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

*Il est recommandé de **lire** le sujet.*

Exercice 1 [Calcul des prédicats - Sémantique (7.5 points)]

1. On considère un langage du premier ordre $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{c/0, g/2\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{Q/1, P/3\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat. On veut construire une interprétation $\mathcal{I}$ tel que son domaine soit l'ensemble $\mathbb{N}$. Donner une unique interprétation à chaque symbole de Σ afin qu'elle satisfasse les formules G_1 et G_2. Attention aux variables libres.

$$\begin{array}{rcl} G_1 & = & \forall x\ [Q(x) \land \exists y\ P(x, y, g(c, z))] \\ G_2 & = & Q(x) \rightarrow \exists y\ P(y, x, c) \end{array}$$

2. On considère un langage du premier ordre $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{c/0, g/2\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{R/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicats. Pour chacune des formules F_i suivantes précisez, en détaillant vos calculs, si elle est satisfaisable ou pas dans les interprétations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & \forall y\ R(g(y, c), y) \\ F_2 & = & \exists x\ \exists y\ [\neg R(x, c) \land \neg R(y, c) \land R(g(x, y), c)] \\ F_3 & = & \forall x\ \exists y\ R(g(y, y), x) \\ F_4 & = & \forall x\ \exists y\ R(g(x, y), c) \end{array}$$

   (a) Le domaine est $\mathbb{Z}$, $\mathcal{I}(g)(a, b) = a \times b$, $\mathcal{I}(c) = 1$ et $\mathcal{I}(R) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

   (b) Le domaine est $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}(g)(a, b) = a \times b$, $\mathcal{I}(c) = 0$ et $\mathcal{I}(R) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

   (c) Le domaine est $\mathbb{Z}/5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{I}(g)(a, b) = a +_5 b = (a + b) \bmod 5$, $\mathcal{I}(c) = 0$ et $\mathcal{I}(R) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}/5\}$.

Exercice 2 [Résolution (7.5 points)] On considère un langage du premier ordre, où $a/0, b/0, f/1$ sont des symboles de fonction et $P/0, Q/1$ sont des symboles de prédicat. En appliquant la méthode de résolution, montrer les faits suivants :

1. La formule $P \rightarrow \exists z\ Q(z)$ est conséquence logique de la formule $\exists x\ (P \rightarrow Q(x))$.
2. La formule $(P(a) \lor P(b)) \rightarrow \exists x\ P(x)$ est valide.
3. La formule $\neg(\exists x\ (P(x) \rightarrow P(f(x))))$ est contradictoire.

Exercice 3 [Calcul des prédicats - Syntaxe (5 points)] Formaliser les raisonnements suivants en calcul des prédicats en donnant une seule formule par item :

1. Si quelqu'un peut obtenir un prix, alors un bon sportif le peut. Marc est un bon sportif qui ne peut pas obtenir de prix. Donc personne ne peut obtenir de prix.

2. Tous les camarades de Pierre sont musclés. Quelques-uns de ses camarades sont fatigués. Aucune personne fatiguée ne peut être musclée. Donc tous les camarades de Pierre peuvent obtenir un prix.
3. Aucun des camarades de Pierre n'est fatigué. Donc tous les camarades de Pierre sont fatigués.

On utilisera uniquement le symbole de fonction d'arité 0 "marc" pour indiquer l'individu Marc et les symboles de prédicats unaires (d'arité 1) suivants :

- $A(x)$ pour exprimer « x est un camarade de Pierre »
- $D(x)$ pour exprimer « x est musclé »
- $H(x)$ pour exprimer « x est fatigué »
- $R(x)$ pour exprimer « x peut obtenir un prix »
- $B(x)$ pour exprimer « x est un bon sportif »