Logique – Examen 2ème Session (durée 2h30)

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de lire le sujet.

Exercice 1 [Calcul des prédicats - Sémantique (6 points)] On considère un langage du premier ordre $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{c/0, g/2\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{\dot{=}/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicats. Pour chacune des quatre interprétations suivantes, précisez, en détaillant vos calculs, si elles satisfont les formules F_1, F_2, F_3 ci dessous :

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall y \exists x (g(y, x) \dot{=} c) \\ F_2 &= \exists x \exists y [\neg(x \dot{=} c) \wedge \neg(y \dot{=} c) \wedge (g(x, y) \dot{=} x)] \\ F_3 &= \forall x \forall y \neg(g(x, y) \dot{=} c) \end{aligned}$$

1. Le domaine est $\mathbb{Z}$, $\mathcal{I}(g)(a, b) = a + b$, $\mathcal{I}(c) = 0$ et $\mathcal{I}(\dot{=}) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.
2. Le domaine est $\mathbb{Z}$, $\mathcal{I}(g)(a, b) = a \times b$, $\mathcal{I}(c) = 1$ et $\mathcal{I}(\dot{=}) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.
3. Le domaine est $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}(g)(a, b) = a \times b$, $\mathcal{I}(c) = 1$ et $\mathcal{I}(\dot{=}) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
4. Le domaine est $\mathbb{Z}/5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{I}(g)(a, b) = a +_5 b = (a + b) \bmod 5$, $\mathcal{I}(c) = 0$ et $\mathcal{I}(\dot{=}) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}/5\}$.

Exercice 2 [Gentzen (7 points)] On considère un langage du premier ordre, où $Q/1, R/1, P/2$ sont des symboles de prédicat. En utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats, démontrer les faits suivants :

1. La formule $\forall x \exists y P(y, x)$ est conséquence logique de la formule $\exists y \forall x P(y, x)$.
2. La formule $[Q(a) \wedge (\forall x Q(x) \rightarrow Q(f(x)))] \rightarrow \exists z Q(f(f(z)))$ est valide.
3. La formule $[\exists x (Q(x) \rightarrow R(x))] \wedge \neg[\forall y Q(y) \rightarrow \exists z R(z)]$ est contradictoire.

Exercice 3 [Résolution (7 points)] On considère un langage du premier ordre, où $Q/1, R/1, P/2$ sont des symboles de prédicat. En appliquant la méthode de résolution, montrer les faits suivants :

1. La formule $\forall x \exists y P(y, x)$ est conséquence logique de la formule $\exists y \forall x P(y, x)$.
2. La formule $[Q(a) \wedge (\forall x Q(x) \rightarrow Q(f(x)))] \rightarrow \exists z Q(f(f(z)))$ est valide.
3. La formule $[\exists x (Q(x) \rightarrow R(x))] \wedge \neg[\forall y Q(y) \rightarrow \exists z R(z)]$ est contradictoire.