Université Paris 7 - L3 Informatique Mai 2007

Examen final de logique

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de ***lire*** *le sujet en entier avant de commencer à rédiger.*

Le barème est donné uniquement à titre indicatif et il est susceptible de modifications.

Exercice 1 [Système de Gentzen pour le calcul des prédicats (4 points)] Donner une dérivation du séquent suivant dans le système de Gentzen pour le calcul des prédicats.

$$\forall x\ (a(x) \vee (b(x) \wedge \neg c(x))) \vdash \forall x\ (\neg a(x) \rightarrow (b(x) \rightarrow \neg c(x)))$$

Exercice 2 [Sémantique du calcul des prédicats (6 points)] On considère un langage du premier ordre où $\Sigma_F = \{a/0, s/1\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{q/1, p/3\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat. Soient A et B les formules suivantes :

$$\begin{array}{rl} A: & [q(a) \wedge \forall x\ (q(x) \rightarrow q(s(x)))] \rightarrow \forall y\ q(y) \\ B: & \forall v\ [(\exists w\ p(v, w, a)) \rightarrow (\exists w\ p(w, w, a))] \end{array}$$

1. Soit I une interprétation donnée par le domaine $D = \{1, 2\}$, l'ensemble de fonctions $I(a) = 1$, $I(s)(x) = x$ et la relation unaire $I(q) = \{1\}$. Soit σ une assignation arbitraire.
   Calculer la valeur de la formule A (i.e. $[A]_{I,\sigma}$) en donnant **tous** les détails de vos calculs.
2. Donner une interprétation qui satisfait la formule A sur un domaine **infini**.
3. Soit I une interprétation donnée par le domaine $D = \{1, 2\}$, l'ensemble de fonctions $I(a) = 1$ et la relation ternaire $I(p) = \{(1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2)\}$. Soit σ une assignation arbitraire.
   Calculer la valeur de la formule B (i.e. $[B]_{I,\sigma}$) en donnant **tous** les détails de vos calculs.
4. Donner une interprétation qui satisfait la formule B sur un domaine **infini**.

Exercice 3 [Résolution dans le calcul des prédicats (5 points)] Considérons les quatre formules suivantes, où les symboles de fonction sont $\{a/0, d/0, f/2\}$ et le seul symbole de prédicat est $\{p/1\}$.

F_1 : $p(a)$.

F_2 : $\forall x_1\ \exists x_2\ p(x_2)$.

F_3 : $\forall x_3\ p(x_3) \rightarrow p(f(d, x_3))$.

F_4 : $\exists x_4\ p(f(d, f(d, f(d, x_4))))$.

En utilisant la méthode de résolution, montrer que F_4 est une conséquence logique de l'ensemble de formules $\{F_1, F_2, F_3\}$.

Exercice 4 [Forme normale prénexe (5 points)]

1. Donner la forme normale prénexe de la formule $(\exists y\ r(x, y) \vee \forall z\ q(z, z)) \wedge (\neg\forall x\ p(x))$. Attention aux renommages de variables.
2. Montrer par induction que toute formule est équivalente à une forme prénexe.