Révision de Logique

Calcul des predicats

Exercice 1 Étant donné un langage de signature $\Sigma_F = \{a/0, f/2\}$ et $\Sigma_P = \{P/1, Q/3\}$, donner pour chacune des formules suivantes une interprétation qui les satisfait et une qui les falsifie, en fixant le domaine à $\mathbb{N}$, P à l'ensemble des nombres pairs et a à 2.

1. $F_1 = \forall x \forall y (P(g(x, x)) \wedge (Q(x, a, y) \rightarrow P(y)) \wedge (P(x) \rightarrow \exists y Q(a, y, x)))$;
2. $F_2 = \exists x (\neg P(g(x, y))) \wedge \forall x \forall y (\exists z (Q(x, y, z)) \wedge \exists z \neg Q(x, y, z))$;
3. $F_3 = F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow \exists x Q(g(a, a), x, a))$.

Exercice 2 Soit Σ la signature donnée par $\Sigma_F = \{p/0, e/1\}$ et $\Sigma_P = \{S/1, A/2\}$ où les symboles expriment

- p l'individu "Pierre";
- $e(x)$ "le pire ennemi de x ";
- $S(x)$ " x est sympa";
- $A(x, y)$ " x est ami de y " (ou " y a x comme ami").

Formaliser les raisonnements suivants en calcul des prédicats en donnant une seule formule par point.

1. Tous ceux qui ne sont pas sympas ne sont amis de personne. Tout le monde a un ami. Donc il y a quelqu'un de sympa.
2. Les amis de chacun ne sont jamais amis de son pire ennemi. Un des amis de Pierre est ami de tout le monde. Donc tous les amis de Pierre sont sympas.

Donner des preuves de la validité de ces raisonnements, soit avec la méthode de Gentzen, soit avec la méthode de la résolution.

Exercice 3 Montrer avec la méthode de Gentzen et avec la résolution que

1. La formule $\forall x P(x, x)$ est conséquence logique de
 - $\forall x \exists y P(x, y)$,
 - $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$ et
 - $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$.
2. La formule $\exists x \neg \exists y P(x, y)$ est conséquence logique de
 - $\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$,
 - $\forall x (A(x) \rightarrow (\exists y P(y, x)) \rightarrow B(x))$ et
 - $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$.