

TD de Logique n° 9

Révision logique propositionnelle

Exercice 1

- Considérez $\neg\neg((F \vee H) \wedge G) \vdash (F \vee H)$. Montrez que ce séquent est dérivable dans H_{prop} . Montrez que ce séquent est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.
- Montrez que $(\neg F \rightarrow G) \vdash (F \vee G)$ est dérivable dans DN_{prop} .

Exercice 2 Considérons le raisonnement suivant : *S'il est venu seul, il a pris le bus ou le train. S'il a pris le bus ou son automobile alors il est arrivé en retard et a manqué la réunion. Il n'est pas arrivé en retard. Donc s'il est venu seul il a pris le train.*

- Formaliser chacune des 4 phrases du raisonnement ci-dessus par une formule logique (soit 4 formules au total).
- Formaliser le paragraphe entier par une seule formule logique utilisant toutes les formules du point précédent.
- Est-ce que le raisonnement est correct ? Utilisez la méthode de votre choix (parmi celles vues en cours) pour répondre de manière affirmative ou négative.

Exercice 3 Dans la suite, les lettres **a, b, c, d, p, q** et **r** représentent des variables propositionnelles.

1. (a) Montrez dans DN_{prop} , que

$$\vdash_{DN_{prop}} ((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (p \vee r)$$

- (b) Soient des formules A, B et C . Montrez que si on a une preuve de $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A \rightarrow B$ et de $\Delta \vdash_{DN_{prop}} B \rightarrow C$, on peut aussi prouver $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A \rightarrow C$.

- (c) En utilisant les deux derniers résultats, et en supposant qu'on a aussi prouvé $\vdash_{DN_{prop}} ((r \vee (p \wedge q)) \rightarrow (r \vee p))$, prouvez que

$$\vdash_{DN_{prop}} ((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \rightarrow (a \vee c)$$

2. (a) Montrez que

$$(p \wedge \neg p) \vdash_{DN_{prop}} q$$

- (b) Montrez que

$$\vdash_{DN_{prop}} \neg(p \wedge \neg p)$$

3. Montrez que

$$\vdash_{DN_{prop}} (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$