Année 2008-2009

TD de Logique n° 3
éléments de corrections

/!\ : corrigé partiel et non officiel,
à lire d'un œil critique

Dans ce TD, il est question du système de Gentzen, ou système $\mathcal{G}$, un axiome, et 8 règles de dérivation.

Rappel de cours (poly 3, pages 55 et 56)
Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$
Règles d'inférence :

- $\neg$ *g* : $\dfrac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}$

- $\neg$ *d* : $\dfrac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}$

- $\rightarrow$ *g* : $\dfrac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma}$

- $\rightarrow$ *d* : $\dfrac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma}$

- $\wedge$ *g* : $\dfrac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}$

- $\wedge$ *d* : $\dfrac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}$

- $\vee$ *g* : $\dfrac{\Delta, A \vdash \Gamma \qquad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}$

- $\vee$ *d* : $\dfrac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}$

Remarques :

- À la lecture de ces règles on peut comprendre que les virgules, à gauche font office de ET, que les virgules à droite font office de OU.
- On remarque que chaque dérivation " détruit " un symbole (→, ∧, ∨, ¬) (si on lit de bas en haut), on sait donc, dès le départ, combien d'étape on aura au maximum.
- Sur les 8 règles, 3 génèrent 2 branches, on utilisera donc ces règles le plus tard possible dans les raisonnements pour éviter de refaire certains calculs plusieurs fois.

Exercice 1 :

Question 1 :

Méthode :

On peut appliquer 3 règles : →*g* (sur (p ∨ q) → r), ¬*g* (sur ¬ (p ∧ s)), ou ¬*d* (sur ¬p ou sur ¬s).
Comme →*g* divise notre formule en 2, commençons par appliquer ¬*g* et ¬*d* 2 fois (peu importe dans quel ordre) :

$$\begin{array}{cr}
\underline{(p \lor q) \to r,\ p,\ s \vdash p \land s} & (\neg d)\\
\underline{(p \lor q) \to r,\ p \vdash p \land s,\ \neg s} & (\neg d)\\
\underline{(p \lor q) \to r \vdash p \land s,\ \neg p,\ \neg s} & (\neg g)\\
(p \lor q) \to r,\ \neg (p \land s) \vdash \neg p,\ \neg s &
\end{array}$$

On a maintenant le choix entre →*g* et ∧*d* (apparu lorsqu'on a appliqué ¬*g*).
Appliquer ∧*d* (sur p ∧ s) semble plus pertinent, car p ∧ s referme 2 éléments qu'on trouve à gauche (p et s), alors (p ∨ q) → r contient 2 élément qu'on ne trouve pas à droite ((p ∨ q) et r), il est donc plus intéressant " d'éclater " p ∧ s :

$$\dfrac{(p \lor q) \to r,\ p,\ s \vdash p \qquad (p \lor q) \to r,\ p,\ s \vdash s}{(p \lor q) \to r,\ p,\ s \vdash (p \land s)}\ (\land\, d)$$

On tombe sur l'axiome de $\mathcal{G}$, à gauche, avec A = p, et à droite, avec A = s.

Remarques : On s'en serait très bien sortit aussi en commençant par →*g*, on aurait juste fait quelques étapes superflues.

Correction :

$$\begin{array}{cr}
\underline{(p \lor q) \to r,\ p,\ s \vdash p \qquad (p \lor q) \to r,\ p,\ s \vdash s} & (\land\, d)\\
\underline{(p \lor q) \to r,\ p,\ s \vdash (p \land s)} & (\neg d)\\
\underline{(p \lor q) \to r,\ p \vdash (p \land s),\ \neg s} & (\neg d)\\
\underline{(p \lor q) \to r \vdash (p \land s),\ \neg p,\ \neg s} & (\neg g)\\
(p \lor q) \to r,\ \neg(p \land s) \vdash \neg p,\ \neg s &
\end{array}$$

Axiome

Question 2 (facile):

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{p, \neg p \vdash} \ (\neg g)}{p \wedge \neg p \vdash} \ (\wedge g)$$

Axiome

Remarques : Dans cette question, on peut voir que " Faux |— " est valide dans $\mathcal{G}$, de même que " Faux → X " est valide dans tous nos systèmes.

Question 3 :

Méthode :

Après avoir appliqué →*d* on peut hésiter entre utiliser ∧*g* ou ∧*d* (la seconde de 2 façons différentes), mais on s'aperçoit qu'on a déjà montré ¬p ∧ p (ou plutôt p ∧ ¬p, mais peu importe dans $\mathcal{G}$) à la question 2, sans membre de droite, c'est-à-dire qu'on l'a montré pour tout membre de droite, et qu'on peut ré-appliquer le même raisonnement.

On peut aussi avoir cette intuition d'une autre façon (plus utile dans le cas général) :
Quand on a le choix entre appliquer une règle sur le membre de gauche (règle *g*) et une autre sur le membre de droite (règle *d*), demandons nous ce qui fait que ce que notre formule serait valide :
Si c'est que le membre gauche semble toujours faux, inutile de toucher au membre droit.
Si c'est que le membre droit semble toujours vrai, inutile de toucher au membre gauche.
Évidemment, ça ne sera souvent ni l'un ni l'autre, mais ici, ça marche, on est dans le premier cas, donc plus la peine d'appliquer de règles *d* après la premier étape.

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p, (p \vee r) \wedge s \wedge m}{\neg p, p \vdash (p \vee r) \wedge s \wedge m} \ (\neg g)}{\neg p \wedge p \vdash (p \vee r) \wedge s \wedge m} \ (\wedge g)}{\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow ((p \vee r) \wedge s \wedge m)} \ (\rightarrow d)$$

Axiome

Question 4 (facile) :

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q, r, s \vdash p}{p, q, r \vdash s \to p}\ (\to d)}{p, q \vdash r \to s \to p}\ (\to d)}{p \vdash q \to r \to s \to p}\ (\to d)}{\vdash p \to q \to r \to s \to p}\ (\to d)$$

Axiome

NB : Rappelons que $p \to q \to r \to s \to p$ signifie $p \to (q \to (r \to (s \to p)))$ comme expliqué au début du sujet du TD 1, la règle $\to d$ ne peut donc s'appliquer nul part ailleurs que sur la première flèche.

(Suite non traitée pour l'instant)

source : http://info.paris7.free.fr
Questions, commentaires, critiques, remarques, etc : phosphore85@gmail.com