5 mars 2008

Partiel de Logique
éléments de corrections

/!\ : corrigé partiel et non officiel,
à lire d'un œil critique

Exercice 1, Déduction Naturelle :

Pré-requis : TD 2, exercice 4, et poly 3, pages 32, 33 et 34

Question 1.a :

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{(A\wedge B)\vee E \vdash (A\wedge B)\vee E \qquad \dfrac{\dfrac{(A\wedge B)\vee E,\ A\wedge B \vdash A\wedge B}{(A\wedge B)\vee E,\ A\wedge B \vdash A}(\wedge e)}{(A\wedge B)\vee E,\ A\wedge B \vdash A\vee E}(\vee i) \qquad \dfrac{(A\wedge B)\vee E,\ E \vdash E}{(A\wedge B)\vee E,\ E \vdash A\vee E}(\vee i)}{(A \wedge B) \vee E \vdash A \vee E}(\vee e)}{\vdash ((A \wedge B) \vee E) \rightarrow (A \vee E)}(\rightarrow i)$$

Axiome

Question 1.b :

Remarque : Là, c'est juste de la rédaction, si vous n'aimez pas, passez à la question suivante.

Méthode :

On cherche à montrer :
$\Delta \vdash A \rightarrow B$ et $\Delta \vdash B \rightarrow C \Rightarrow \Delta \vdash B \rightarrow C$
On pourrait étudier tous les cas où $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ sont vrais, mais chacun a 3 façons d'être vrai, ce qui fait 9 possibilités (qu'on peut assez vite réduire à 4 pour des questions de compatibilités, mais ça reste assez long).
C'est plus simple et beaucoup plus court si on se souvient que :
X et Y $\Rightarrow$ Z est équivalent à $\neg Z \Rightarrow \neg X$ ou $\neg Y$
car s'il y a 3 façons de satisfaire une implication, il n'y a qu'une façon de la falsifier.

Correction :

$\Delta \vdash A \rightarrow B$ et $\Delta \vdash B \rightarrow C \Rightarrow \Delta \vdash B \rightarrow C$
est équivalent à :
$\Delta \vdash \neg(B \rightarrow C) \Rightarrow \Delta \vdash \neg(A \rightarrow B)$ ou $\Delta \vdash \neg(B \rightarrow C)$

Soit I une interprétation.

Si I falsifie une ou plusieurs formules qui composent Δ, tous les séquents sont trivialement Vrai, l'implication est donc vérifiée (Vrai $\Rightarrow$ Vrai ou Vrai).

Si I satisfait toutes les formules qui composent Δ alors :
$\Delta \vdash \neg(A \to C) \;\Rightarrow\; \Delta \vdash \neg(A \to B)$ ou $\Delta \vdash \neg(B \to C)$
est équivalent à :
$\neg(A \to C) \;\Rightarrow\; \neg(A \to B)$ ou $\neg(B \to C)$
(car Vrai $\vdash$ X est satisfait si et seulement si X est satisfait).

Montrons cette dernière implication :

$[\neg(A \to C)]_I$ = Vrai
ssi $[(A \to C)]_I$ = Faux
ssi $[A]_I$ = Vrai et $[C]_I$ = Faux

Pour montrer qu'on a donc $[\neg(A \to B)]_I$ = Vrai ou $[\neg(B \to C)]_I$ = Vrai, supposons qu'on n'ait pas l'un, et montrons qu'on a alors l'autre :

$[\neg(A \to B)]_I$ = Faux
ssi $[(A \to B)]_I$ = Vrai
comme on sait $[A]_I$ = Vrai, on en déduit $[B]_I$ = Vrai
et si $[B]_I$ = Vrai, comme on sait $[C]_I$ = Faux, alors $[(B \to C)]_I$ = Faux
et donc $[\neg(B \to C)]_I$ = Vrai

cqfd

Autre méthode :

Remarque : Méthode simple, logiquement cohérente, mais peut-être un peu rapide, je ne sais pas si elle vaut tous les points.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta, A \vdash A \qquad \Delta, A \vdash A \to B}{\Delta, A \vdash B}\,(\to e) \qquad \Delta, A \vdash B \to C}{\Delta, A \vdash C}\,(\to e)}{\Delta \vdash A \to C}\,(\to i)$$

Axiome
Quasi-hypothèse

Si $\Delta \vdash A \to B$ est vrai, alors $\Delta, E \vdash A \to B$ est vrai $\forall$ E (d'après l'axiome, les règles d'inférences de DN, et le bon sens, des hypothèses supplémentaires ne peuvent falsifier une formule valide).

Il en va de même de même pour $\Delta \vdash B \to C$.

Question 1.c :

Méthode :

Là, il suffit vraiment de lire et de comprendre la question :
On nous donne une nouvelle implication (question 1.b), autrement dit une nouvelle règle de dérivations :

$$\frac{\Delta \vdash A \rightarrow B \qquad \Delta \vdash B \rightarrow C}{\Delta \vdash A \rightarrow C}$$

On nous donne aussi 2 nouveaux séquents valides (question 1.a et énoncé de 1.c), qu'on peut donc utiliser comme s'ils étaient des hypothèses ou des axiomes.
On nous demande d'utiliser tous ça pour montrer la validité d'un séquent.
Utilisons naïvement la nouvelle règle de dérivation sur ce séquent :

$$\frac{\vdash ((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \rightarrow X \qquad \vdash X \rightarrow (a \vee c)}{\vdash ((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \rightarrow (a \vee c)}$$

Que mettre pour X ?
Là encore, suivons la question, cherchons à voir dans un de nos séquents valides dans le premier membre, et, si on y arrive, voyons si ça nous donne notre autre séquent valide dans le second membre.
Et en associant le premier membre avec le premier séquent, ça marche.

Correction :

D'après l'implication montrée en 1.b, on peut dériver ainsi :

$$\frac{\vdash ((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \rightarrow a \vee (c \wedge d) \qquad \vdash a \vee (c \wedge d) \rightarrow (a \vee c)}{\vdash ((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \rightarrow (a \vee c)}$$

Forme montrée en 1.a : $\vdash ((A \wedge B) \vee E) \rightarrow A \vee E$
Forme supposée en 1.c : $\vdash (A \vee (C \wedge D)) \rightarrow A \vee C$

Autre méthode :

En associant le premier membre avec le second séquent, ça marche aussi.

D'après l'implication montrée en 1.b, on peut dériver ainsi :

$$\frac{\vdash ((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \rightarrow (a \wedge b) \vee c \qquad \vdash ((a \wedge b) \vee c) \rightarrow (a \vee c)}{\vdash ((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \rightarrow (a \vee c)}$$

Forme montrée en 1.a : $\vdash ((A \wedge B) \vee E) \rightarrow A \vee E$
Forme supposée en 1.c : $\vdash (A \vee (C \wedge D)) \rightarrow A \vee C$

Question 2.a (facile) :

Correction :

1)

$$\dfrac{p \wedge \neg p \vdash p \wedge \neg p}{p \wedge \neg p \vdash p} \quad (\wedge e)$$

Axiome

2)

$$\dfrac{p \wedge \neg p \vdash p \wedge \neg p}{p \wedge \neg p \vdash \neg p} \quad (\wedge e)$$

Axiome

Question 2.b (facile) :

Correction :

$$\dfrac{p \wedge \neg p \vdash p \qquad p \wedge \neg p \vdash \neg p}{\vdash \neg(p \wedge \neg p)} \quad (\neg i)$$

Valide, cf question 2.a.1

Valide, cf question 2.a.2

Exercice 2, Système G :

Pré-requis : TD 3, et poly 3, pages 55 et 56

Question 1.a :

Correction :

$$\dfrac{\vdash p, p \qquad p \vdash p}{p \rightarrow p \vdash p} \quad (\rightarrow g)$$

Axiome

Faux pour [p] = Faux

Donc I est une interprétation qui falsifie le séquent si et seulement si $[p]_I$ = Faux.

Question 1.b :

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \rightarrow q,\ \boxed{q} \vdash \boxed{q},\ p \qquad p \rightarrow q,\ q,\ \boxed{p} \vdash \boxed{p}}{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p,\ q \vdash p} \quad (\rightarrow g)}{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p,\ \neg p,\ q \vdash} \quad (\neg g)}{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p,\ \neg p \vdash \neg q} \quad (\neg d)}{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p \vdash \neg p \rightarrow \neg q} \quad (\rightarrow d)$$

Axiome

Question 1.c :

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\vdash r, s \qquad \dfrac{\vdash r, s}{\neg r \vdash s}\,(\neg g)}{r \to \neg r \vdash s}\,(\to g)}{\vdash (r \to \neg r) \to s}\,(\to d)$$

Faux pour [r] = Faux et [s] = Faux

Donc I est une interprétation qui falsifie le séquent si et seulement si $[r]_I$ = Faux et $[s]_I$ = Faux.

Question 1.d :

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vdash r}{\vdash r, \neg r}\,(\neg d) \qquad \neg r \vdash \neg r}{r \to \neg r \vdash \neg r}\,(\to g)}{\vdash (r \to \neg r) \to \neg r}\,(\to d)$$

Axiome

Autre méthode :

Dans la question 1.c, on a étudié le même séquent avec ¬r = s, et on a montré qu'il ne pouvait être falsifier que si r et s étaient tous les 2 Faux, ce qui est impossible ici, puisque r et ¬r ne peuvent pas être tous les 2 Faux, le séquent est donc valide.

Question 2 :

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\vdash r, p \qquad \dfrac{r \vdash p}{\vdash \neg r, p}\,(\neg d)}{\vdash r \wedge \neg r, p}\,(\wedge g) \qquad s \vdash p}{(r \wedge \neg r) \to s \vdash p}\,(\to g)$$

Faux pour [s] = Faux et [p] = Faux

Faux pour [r] = Faux et [p] = Faux

Faux pour [r] = Vrai et [p] = Faux

D'après les 2 dernières lignes, si p est Faux, alors le séquent est Faux.
La première ligne n'ajoute pas d'autre interprétation.
Donc I est une interprétation qui falsifie le séquent si et seulement si $[p]_I$ = Faux.

Question 3 :

Correction :

Voici une dérivation possible :

$$\dfrac{\dfrac{q \to r, p \vdash r, p \qquad \dfrac{p, q, r \vdash r \qquad p, q \vdash q, r}{q \to r, p, q \vdash r}\ (\to g)}{p \to q, q \to r, p \vdash r}\ (\to g)}{p \to q, q \to r \vdash p \to r}\ (\to d)$$

Axiome

(Suite non traitée pour l'instant)