

Logique – Partiel (durée : 3 h)

*Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles.
Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.*

Rédiger chaque exercice dans une feuille indépendante

Exercice 1 (Résolution)

1. Soient les lettres propositionnelles b, c, s et m . Soit l'ensemble de formules $E = \{c \vee s, \neg c \rightarrow \neg s, m \vee b, (c \wedge b) \rightarrow s, (c \wedge m) \rightarrow s, (s \wedge \neg m) \rightarrow \neg c\}$.
Donnez l'ensemble C_E des clauses associé à l'ensemble E . Puis, en utilisant la méthode de résolution, montrez que $C_E \vdash_R m$.
2. Soient les lettres propositionnelles p, q et r . Soit l'ensemble de clauses $\Delta = \{p \vee q \vee r, \neg p, \neg q \vee r\}$.
 - (a) Calculez l'ensemble Δ' de toutes les clauses que l'on peut obtenir à partir des clauses de Δ par résolution.
 - (b) Est-ce que l'ensemble Δ est réfutable? Justifiez votre réponse.
3. Soient les lettres propositionnelles $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$. Soient les ensembles de formules $F_n = \{p_1, p_1 \rightarrow p_2, \dots, (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{i-1}) \rightarrow p_i, \dots, (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n\}$, pour $n \geq 2$. Soit C_{F_n} l'ensemble de clauses associé à la formule F_n , pour $n \geq 2$.
On a donc, en particulier, $F_2 = \{p_1, p_1 \rightarrow p_2\}$ et $F_3 = \{p_1, p_1 \rightarrow p_2, (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3\}$
 - (a) Montrez en utilisant la résolution que $C_{F_2} \vdash_R p_2$.
 - (b) Montrez en utilisant la résolution que $C_{F_3} \vdash_R p_2$ et $C_{F_3} \vdash_R p_3$.
 - (c) Montrez plus généralement que pour tout $n \geq 2$ et tout $1 \leq i \leq n$, on a $C_{F_n} \vdash_R p_i$.
On raisonnera par récurrence sur n .

Exercice 2 (Modélisation et Bases de données) Considérons un extrait d'une base de données représentée par les trois tables suivantes :

Livre			Prêt		
cote	titre	auteur	cote	id	date_emprunt
AM50	Métaphysique	Aristote	AM50	A22	01/03/1796
AR54	Rhétorique	Aristote	DMSL12	A1	12/12/1770
LMO254	Monadologie	Leibniz	AM50	A1	15/02/1770
DMSL12	System of Logic	De Morgan	LM0254	A22	01/03/1796

Abonné		
id	nom	année_naissance
A3042	Gehrard Gentzen	1909
A78	Ada Lovelace	1815
A22	Sophie Germain	1776
A1	Olympe de Gouges	1748

À chaque table de la base de données, on associe un prédicat dont l'arité est le nombre d'attributs de la table. Par exemple, on représente :

- la table **Livre** par un prédicat **L** d'arité 3 et
« **L**(AM50, Métaphysique, Aristote) », signifie que « AM50 est la cote du livre de titre Métaphysique dont l'auteur est Aristote » ;
- la table **Abonné** par un prédicat **A** d'arité 3 et
« **A**(A3042, Gehrard Gentzen, 1909) », signifie que « Gehrard Gentzen, né en 1909 est l'abonné d'identifiant A3042 » ;
- la table **Prêt** par un prédicat **P** d'arité 3 et
« **P**(DMSL12, A1, 12/12/1770) », signifie que le « livre de cote DMSL12 a été emprunté par l'abonné d'identifiant A1 à la date 12/12/1770 ».

Pour écrire les formules du calcul du prédicat, on utilisera aussi un prédicat d'égalité = et un prédicat de comparaison $\leq$.

On se donne une fonction **age** qui, étant donnée une année de naissance, calcule l'âge de la personne, et une autre fonction **jours** qui, étant donnée une date, donne le nombre de jours écoulés depuis cette date. On se donne trois constantes **Aristote**, **De Morgan** et **Leibniz** ainsi qu'une constante **n** pour chaque entier n .

1. Définir l'ensemble des prédicats Σ_P et l'ensemble des fonctions Σ_F décrivant la base de donnée décrite ci-dessus.

2. Modéliser les affirmations suivantes par des formules du calcul des prédicats qui soient *closes* (sans variable libre) :

- (a) Il existe un abonné qui a plus de 200 ans.
- (b) Tous les livres empruntés le sont depuis moins de 10 jours.
- (c) Quelqu'un a emprunté un livre écrit par Aristote.
- (d) Tous les abonnés ont empruntés au moins deux livres le même jour.

3. Modéliser le raisonnement suivant par une seule formule du calcul des prédicats :

- La bibliothèque ne possède pas de livre de Leibniz.
- Tous les livres ont été empruntés il y a 30 jours exactement.
- On en conclut qu'aucun livre de Leibniz n'a été emprunté depuis 30 jours.

4. Pour chacune des formules suivantes, déterminer la ou les variables libres :

- (a) $\exists c. \mathbf{L}(c, t, \mathbf{Leibniz})$
- (b) $\exists c. [(\exists a. \mathbf{L}(c, t, a)) \wedge \exists i. \exists d. \mathbf{P}(c, i, d)]$
- (c) $\exists i. [\exists d. \mathbf{A}(i, n, d) \wedge \exists c. [\exists d. \mathbf{P}(c, i, d) \wedge (\exists t. (\mathbf{L}(c, t, \mathbf{Leibniz}) \vee \mathbf{L}(c, t, \mathbf{Aristote})))]]$
- (d) $\exists c. \exists c'. \exists d. [(\exists t. \mathbf{L}(c, t, a)) \wedge (\exists i. \mathbf{P}(c, i, d)) \wedge (\exists t. \mathbf{L}(c', t, a')) \wedge (\exists i. \mathbf{P}(c', i, d)) \wedge \neg(c = c')]$

5. Pour chacune des formules ci-dessus, déterminer toutes les valeurs booléennes des variables libres qui rendent la formule vraie dans les tables décrites au début de l'exercice.

Exercice 3 (Système de Gentzen) On considère un nouveau connecteur ternaire **if** dont la sémantique est donnée par l'équivalence suivante $\text{if}(A, B, C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C)$. On considère deux systèmes de preuve différents :

- Le système $\mathcal{G}$ du cours (donné en annexe).
- Un nouveau système que l'on appelle $\mathcal{N}$ qui contient toutes les règles de $\mathcal{G}$ plus les deux nouvelles règles suivantes :

$$\frac{\Delta, B, C \vdash \Gamma \quad \Delta, B, A \vdash \Gamma \quad \Delta, C \vdash A, \Gamma}{\Delta, \text{if}(A, B, C) \vdash \Gamma} (\text{if } g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma \quad \Delta \vdash A, C, \Gamma}{\Delta \vdash \text{if}(A, B, C), \Gamma} (\text{if } d)$$

On note $\pi \triangleright \Delta \vdash_S \Gamma$ la dérivation π du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système S , où S est $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{G}$. La taille d'une dérivation π est le nombre des noeuds de l'arbre π .

1. Donner une dérivation dans le système $\mathcal{N}$ du séquent suivant, en précisant aussi sa taille :
 $\vdash \text{if}(\neg p \vee \neg s, \neg(p \wedge q \wedge s), \neg \neg s \vee r)$.

2. En utilisant l'équivalence donnée au début de l'énoncé pour le connecteur **if**, traduire la formule $A_1 = \text{if}(\neg p \vee \neg s, \neg(p \wedge s), \text{if}(s, s, \neg s))$ dans une formule équivalente (qu'on appellera A_2) qui ne contient aucune occurrence du symbole **if**. $(s \rightarrow s) \wedge (\neg s \rightarrow \neg s)$

3. On considère les formules A_1 et A_2 du point précédent. On considère également une dérivation quelconque du séquent $\vdash A_1$ dans le système $\mathcal{N}$ que nous appellerons π_1 .

Expliquer sommairement comment construire une dérivation π_2 de la formule A_2 dans le système $\mathcal{G}$ à partir de la dérivation π_1 . Quelle est la relation ($\leq$, $\geq$ ou $=$) entre les tailles de π_1 et π_2 ?

4. On veut définir une fonction T qui élimine toutes les occurrences du connecteur **if** d'une formule en les remplaçant par sa formule équivalente. Donner une définition inductive de la fonction T .

5. On généralise la définition de la fonction T aux multi-ensembles de formules de la manière suivante :

$$T(A_1, \dots, A_n) := T(A_1), \dots, T(A_n)$$

Montrer que pour toute dérivation $\pi_1 \triangleright \Delta \vdash_{\mathcal{N}} \Gamma$, où Δ et Γ sont des multi-ensembles pouvant contenir le connecteur **if**, il existe une dérivation $\pi_2 \triangleright T(\Delta) \vdash_{\mathcal{G}} T(\Gamma)$ telle que $\text{taille}(\pi_1) \leq \text{taille}(\pi_2)$.

Raisonnement par induction sur la dérivation de $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \Gamma$. Traiter seulement le cas de base, le cas des règles ($\wedge g$) et ($\wedge d$), ainsi que les cas des règles (**if** g) et (**if** d).

ANNEXE

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A} (ax) \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma} (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A} (\neg d) \quad \frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma} (\wedge g) \\
\\
\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma} (\wedge d) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma} (\rightarrow g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma} (\rightarrow d) \\
\\
\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma} (\vee g) \quad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee d)
\end{array}$$

FIGURE 1 – Les règles du système $\mathcal{G}$ pour le calcul propositionnel

Axiomes : Δ est un ensemble de clauses.

$$\frac{}{C} (C \in \Delta)$$

Règles d'inférence : D et C sont des clauses, p une lettre propositionnelle

$$\frac{D \vee p \quad C \vee \neg p}{D \vee C} (\text{coup.}) \quad \frac{D \vee p \vee p}{D \vee p} (\text{fact.}) \quad \frac{D \vee \neg p \vee \neg p}{D \vee \neg p} (\text{fact.})$$

FIGURE 2 – Les règles de la résolution pour le calcul propositionnel

Variables $\mathcal{X}$, symboles de fonction Σ_F , symboles de prédicats Σ_P , signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$.

Termes :			Atomes :	
$x \in \mathcal{X}$	$t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$f/n \in \Sigma_F$	$t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$p/n \in \Sigma_P$
$x \in \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$		$p(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	

Formules :				
$p(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$A \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$
$p(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$\neg A \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$A \rightarrow B \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$A \vee B \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$	$A \wedge B \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$
$A \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}$		$A \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}$		
$\forall x. A \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$		$\exists x. A \in \mathcal{F}_{\Sigma, \mathcal{X}}$		

FIGURE 3 – La syntaxe du calcul des prédicats