LC6

Université Paris Diderot – L3 Informatique 5 Mai 2018

Examen final (durée : 3h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1 [Unification (4 points)] Nous rappelons les règles de l'algorithme d'unification vu en cours dans l'appendice. Nous considérons une signature $\Sigma_F = \{b/0, h/1, j/3\}$ et des variables x, y, z, ...

1. En appliquant l'algorithme vu en cours, calculer l'unificateur principal τ du problème $\mathcal{P}_1 = \{j(x, h(b), j(b, z, x')) \doteq j(h(y), x, j(b, w, x'))\}$.
2. En utilisant la même syntaxe donnée dans l'énoncé, exhiber un problème d'unification $\mathcal{P}_2$ tel que l'application de l'algorithme vu en cours produise un unificateur principal en utilisant exactement une fois la règle décomposer, deux fois la règle remplacer, une fois la règle effacer et deux fois la règle orienter (pas forcément dans cet ordre).

Exercice 2 [Résolution (4 points)] On considère un langage où $\Sigma_F = \{a/0, f/1\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{t/1, d/1, r/2, q/1\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat.

1. Considérons les formules suivantes :

$$\begin{array}{rl} H_1: & \exists x.t(x) \\ H_2: & \forall x.(d(x) \rightarrow \forall y.r(y,x)) \\ H_3: & \forall x.\forall y.[\neg(t(x) \rightarrow \neg q(y)) \rightarrow \neg r(x,y)] \\ Conc: & \forall x.(\neg d(x) \vee \neg q(x)) \end{array}$$

   On veut montrer que *Conc* est conséquence logique de $\{H_1, H_2, H_3\}$. Calculer l'ensemble de clauses sur lequel il faudrait appliquer la méthode (sans aller au-delà du calcul de cet ensemble).

2. On considère l'ensemble de clauses suivant $\Delta = \{t(a), \neg t(x) \vee t(f(x)), \neg t(f(f(z)))\}$. Construire une réfutation de l'ensemble Δ en détaillant tous les unificateurs nécessaires pour arriver à la réfutation.

Exercice 3 [Gentzen (4.5 points)] On considère un langage du premier ordre, où $\Sigma_F = \emptyset$ et $\Sigma_P = \{q/1, r/1, p/2\}$. En utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats, démontrer les faits suivants :

1. La formule $\forall x.\exists y.p(y,x)$ est conséquence logique de la formule $\exists y.\forall x.p(y,x)$.
2. La formule $[\exists x.(p(x) \wedge q(x))] \rightarrow [\exists x.p(x) \wedge \exists x.q(x)]$ est valide.
3. La formule $[\exists x.(q(x) \rightarrow r(x))] \wedge \neg[(\forall y.q(y)) \rightarrow \exists z.r(z)]$ est non satisfaisable.

Exercice 4 [Modèles (5 points)]

1. On considère une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0, s/1\}$ et $\Sigma_P = \{p/1, e/2\}$. Soient A et B les formules suivantes :

$$A: \quad \forall x.[e(x,z) \to p(s(z))]$$
$$B: \quad \exists x.\forall y.[e(x,y) \vee e(a,x)]$$

   (a) Donner une interprétation $\mathcal{I}_1 = \langle\{1,2,3\}, I_1\rangle$ t.q. (1) $\mathcal{I}_1$ satisfait A mais (2) $\mathcal{I}_1$ n'est pas un modèle de A.

   (b) Donner une interprétation $\mathcal{I}_2 = \langle\{1,2,3\}, I_2\rangle$ t.q. (1) $\mathcal{I}_2$ est un modèle de A mais (2) $\mathcal{I}_2$ n'est pas un modèle de B.

   (c) Donner une interprétation $\mathcal{I}_3 = \langle\{1,2,3\}, I_3\rangle$ t.q. (1) $\mathcal{I}_3$ n'est pas un modèle de A mais (2) $\mathcal{I}_3$ est un modèle de B.

   (d) Donner une interprétation $\mathcal{I}_4 = \langle\{1,2,3\}, I_4\rangle$ t.q. (1) $\mathcal{I}_4$ n'est pas un modèle de A et (2) $\mathcal{I}_4$ n'est pas un modèle de B.

2. On considère une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0\}$ et $\Sigma_P = \{q/1, r/2\}$. On considère une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathbb{N}, I\rangle$, où I est défini comme suit :

$$I(a) = 2, I(q) = \{n \mid n \geq 15\}, I(r) = \{(n,3) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

   Compléter chacune des formules suivantes en écrivant un **atome** à la place de chaque boite $\boxed{\;?\;}$ pour que l'interprétation I **falsifie** la formule entière.

   (a) $\forall x.\forall y.\boxed{\;?\;}$

   (b) $\exists x.\boxed{\;?\;}$

   (c) $\neg(\forall x.r(x,a) \vee \exists y.\boxed{\;?\;})$

   (d) $\forall x.(\forall y.\boxed{\;?\;} \leftrightarrow q(x))$

Exercice 5 [Induction (2.5 points)] On considère une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{s/1\}$ et $\Sigma_P = \{e/2\}$. On considère l'ensemble $\mathcal{R}$ de toutes les formules sur la signature Σ ne contenant aucun connecteur logique $\neg, \wedge, \vee, \to$.

1. Donner trois formules de l'ensemble $\mathcal{R}$ contenant, respectivement, 0, 1 et 2 variables libres.
2. Définir par induction une fonction $\mathcal{N}$ qui calcule le nombre d'occurrences (libres et liées) de variables d'une formule de $\mathcal{R}$.
3. Montrer par induction que pour toute formule A de $\mathcal{R}$ on a $|A|_e \leq \mathcal{N}(A)$, où $|A|_e$ est le nombre d'occurrences du symbole e dans la formule A (suggestion : comprendre d'abord quelle est la valeur de $\mathcal{N}(t)$ pour un terme t quelconque, et le démontrer par induction sur les termes).

LO6

Appendice

La syntaxe du calcul des prédicats

Variables $\mathcal{X}$, symboles de fonction Σ_F, symboles de prédicats Σ_P, signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$.

Termes :		Atomes :
$\dfrac{x \in \mathcal{X}}{x \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$	$\dfrac{t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad f/n \in \Sigma_F}{f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$	$\dfrac{t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad p/n \in \Sigma_P}{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$

Formules :

$$\frac{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{\neg A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \to B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \vee B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \wedge B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

$$\frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}}{\forall x.A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \quad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}}{\exists x.A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

Règles d'unification

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \text{ (orienter)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}} \text{ (décomposer)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \text{ (effacer)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}} \text{ (remplacer)}$$

Règles de résolution

Axiomes :

$$\frac{}{C} \quad (C \in \Delta, \text{ où } \Delta \text{ est l'ensemble de clauses}).$$

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \; (coupure)$$

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \vee r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee r(s_1, \ldots, s_n))} \; (fact) \qquad \frac{D \vee \neg r(s_1, \ldots, s_n) \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee \neg r(s_1, \ldots, s_n))} \; (fact)$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ et les clauses C et D ne partagent pas de variables.

Système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A}\,(ax) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\,(\neg g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\,(\neg d) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma}\,(\rightarrow g)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma}\,(\rightarrow d) \qquad \frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\,(\wedge g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\,(\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\,(\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\,(\vee d) \qquad \frac{\Delta, \{x \leftarrow t\}(A), \forall x.A \vdash \Gamma}{\Delta, \forall x.A \vdash \Gamma}\,(\forall g)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash \forall x.A, \Gamma}\,(\forall d) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta, \exists x.A \vdash \Gamma}\,(\exists g) \qquad \frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A), \exists x.A, \Gamma}{\Delta \vdash \exists x.A, \Gamma}\,(\exists d)$$

Dans les règles ($\forall$ d) et ($\exists$ g) x n'est libre ni dans Δ ni dans Γ; dans les règles ($\forall$ g) et ($\exists$ d) l'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas de variables (aucune variable de t devient liée).