Université Paris Diderot – L3 Informatique 11 Mars 2017

Logique – Partiel (durée : 3 h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles.
Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Rédiger chaque exercice dans une feuille indépendante

Exercice 1 (Calcul des prédicats) Pour cet exercice on rappelle d'abord la syntaxe du calcul des prédicats dans la Figure 4.

1. **(Modélisation)** On considère un langage du premier ordre où $\Sigma_F = \{\texttt{Jean}/0, \texttt{Pierre}/0, \texttt{pb1}/0\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{I/1, P/1, M/1, B/1, A/2, R/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat. On interprétera les symboles de prédicat de la manière suivante :

   $I(x)$ signifie «x est intelligent»
   $P(x)$ signifie «x est paresseux»
   $M(x)$ signifie «x est un malin»
   $B(x)$ signifie «x est un bon étudiant»
   $A(x, y)$ signifie «x est un ami de y»
   $R(x, y)$ signifie «x peut résoudre le problème y»

   Formaliser chaque *raisonnement* suivant par une formule du calcul des prédicats :

   (a) Si quelqu'un peut résoudre le problème 1, alors on peut trouver un bon étudiant qui le peut. Jean est un bon étudiant et ne peut résoudre aucun problème. Donc personne ne peut résoudre le problème 1.

   (b) Tous les amis de Pierre sont intelligents. Au moins un de ses amis est paresseux. Aucune personne paresseuse ne peut être intelligente. Donc tous les amis de Pierre sont malins.

   (c) Aucun des amis de Pierre n'est paresseux. Donc tous les amis de Pierre sont paresseux.

2. **(Langage)** On considère un ensemble de variables $\mathcal{X}$. Soit $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0, f/1\}$ est l'ensemble des symboles de fonction et $\Sigma_P = \{p/0, q/1, r/2\}$ est l'ensemble des symboles de prédicat. On dénote par $|VI(t)|$ (resp. $|VI(A)|$) le nombre de variables libres du terme t (resp. de la formule A). Pour chaque symbole $\# \in \Sigma$, on dénote par $|t|_\#$ (resp. $|A|_\#$) le nombre de symboles $\#$ dans le terme t (resp. la formule A).

   (a) Donner trois exemples de termes et trois exemples d'atomes de ce langage. Puis dire quels sont *tous* les termes et *tous* les atomes de ce langage.

   (b) Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de toutes les formules A contenant exactement trois occurrences du symbole p, deux occurrences de q et une seule occurrence de r (pas de restriction pour les autres symboles). Donner deux formules différentes dans l'ensemble $\mathcal{S}$.

(c) Soit $|A|_{\forall,\exists}$ le nombre de quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans la formule A. Calculer $\mathtt{max}(\{|A|_{\forall,\exists} \mid A \in \mathcal{S}\})$, i.e. le nombre maximal de quantificateurs d'une formule dans l'ensemble $\mathcal{S}$ défini ci-dessus et vérifiant la propriété suivante : si $\forall x.B$ ou $\exists x.B$ est une sous-formule de A, alors la variable x est nécessairement libre dans B (i.e. telle que tout quantificateur $\forall$ ou $\exists$ rende liée au moins une variable libre).

(d) On change maintenant Σ_F à $\{f/1, g/2\}$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les termes correspondant à cette nouvelle signature. Montrer que pour tout terme t dans $\mathcal{T}$ on a $|VI(t)| \leq 2|t|_g + 1$. On raisonnera par induction sur la structure des termes.

(e) On considère toujours $\Sigma_F = \{f/1, g/2\}$ mais maintenant $\Sigma_P = \{p/0, r/2\}$. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble de toutes les formules correspondant à cette nouvelle signature. Montrer que pour toute formule A dans $\mathcal{U}$ on a $|VI(A)| \leq 2|A|_r \cdot (2|A|_g + 1)$. On raisonnera par induction sur la structure des formules.

Exercice 2 (Preuves syntaxiques)

Le **principe du tiroir de Dirichlet** indique que si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette.

Pour modéliser ce principe, nous allons utiliser les notations suivantes :

« α_{kj} signifie que la k-ème chaussette est dans le j-ème tiroir. »

Nous voulons montrer que :

« Si chaque chaussette est dans l'un des tiroirs,
alors un tiroir contient deux chaussettes. »

1. Nous allons d'abord étudier ce principe dans le cas où $n = 2$ et $m = 1$.

   (a) Énoncer en français le principe dans ce cas.

   (b) Quelles sont toutes les lettres utilisées pour la modélisation et leur signification ?

   (c) Le principe des tiroirs de Dirichlet dans ce cas est modélisé par la formule $D = (\alpha_{11} \wedge \alpha_{21}) \to (\alpha_{21} \wedge \alpha_{11})$. Montrer que cette formule est valide à l'aide de la déduction naturelle (voir la Figure 1).

   (d) On utilise maintenant la résolution (voir la Figure 3). Calculer l'ensemble de clauses Δ obtenu à partir de la négation de la formule D. Puis, montrer que $\Delta \vdash_R$ False. Expliquer pourquoi cela démontre le principe de Dirichlet.

2. Nous allons ensuite étudier ce principe dans le cas où $n = 3$ et $m = 2$.

   (a) Énoncer en français le principe dans ce cas.

   (b) Quelles sont toutes les lettres utilisées pour la modélisation et leur signification ?

   (c) Donner une formule H modélisant que chacune des trois chaussettes est dans le premier tiroir ou [1] dans le second tiroir.

   (d) Donner une formule $T1$ modélisant que deux chaussettes au moins sont dans le premier tiroir et une formule $T2$ modélisant que deux chaussettes au moins sont dans le second tiroir.

---

1. Ne pas écrire une formule trop précise, notamment on n'aura pas besoin du fait qu'une chaussette ne peut pas être dans deux tiroirs différents.

(e) La formule $D' = H \rightarrow (T_1 \vee T_2)$ modélise le principe de Dirichlet dans ce cas. Montrer que cette formule D' est valide à l'aide du système $\mathcal{G}$ (voir la Figure 2). Vous remarquerez que la preuve est très grosse et vous ne compléterez jusqu'à l'axiome qu'une seule branche de l'arbre de preuve.

(f) Montrer qu'à partir de l'hypothèse H on peut déduire la conclusion $T1 \vee T2$ en obtenant une réfutation dans le système de résolution (voir la Figure 3). Pour cela construire par exemple une preuve de $\Delta' \vdash_R \alpha_{11}$ et une preuve de $\Delta' \vdash_R \neg\alpha_{11}$ et les combiner.

Exercice 3 (Système de Gentzen)

On considère un nouveau connecteur $\barwedge$ dont la sémantique est donnée par l'équivalence suivante $A \barwedge B \equiv \neg(A \wedge B) \quad (\alpha)$.

On considère deux systèmes de preuve différents :

- Le système $\mathcal{G}$ dans la Figure 2.
- Un nouveau système que l'on appelle $\mathcal{N}$ qui contient toutes les règles de $\mathcal{G}$ plus les deux nouvelles règles suivantes :

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta, A \barwedge B \vdash \Gamma}\,(\barwedge\ g) \qquad\qquad \frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta \vdash A \barwedge B, \Gamma}\,(\barwedge\ d)$$

On écrit $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \Gamma$ pour une dérivation dans le système $\mathcal{N}$ ayant comme conclusion/racine le séquent $\Delta \vdash \Gamma$.

1. Donner une dérivation dans le système $\mathcal{N}$ du séquent suivant :
   $(r \wedge s) \rightarrow (p \barwedge q), p \vdash s \barwedge r, \neg q$.
2. Démontrer que les deux nouvelles règles $(\barwedge\ g)$ et $(\barwedge\ d)$ sont correctes et réversibles.
3. Traduire la formule $(p \barwedge q) \barwedge r$ dans une formule équivalente sans occurrence du symbole $\barwedge$ en utilisant l'équivalence (α)
4. On veut définir une fonction T qui élimine toutes les occurrences du connecteur $\barwedge$ d'une formule en les remplaçant par leur équivalent. Donner une définition inductive de T.
5. Généraliser la définition de la fonction T aux multi-ensembles de formules en complétant ci-dessous :
   $$\mathtt{T}(\{\{A_1, \ldots, A_n\}\}) :=$$
6. Étant donnée une dérivation π du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans un système, on note $\mathtt{size}(\pi)$ la taille de la dérivation π, i.e. le nombre de règles utilisées dans la dérivation.
   Soit la dérivation π_1 suivante dans $\mathcal{N}$:

le nombre d'utilisation de règles, i.e. une même règle utilisé 2 fois compte pour 2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, r \vdash p, s}\,(ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, r \vdash r, s, s}\,(ax)}{p, r \vdash r \vee s, s}\,(\vee d)}{p \barwedge (r \vee s), p, r \vdash s}\,(\barwedge\ g)}{p \barwedge (r \vee s) \vdash (p \barwedge r), s}\,(\barwedge\ d)}{p \barwedge (r \vee s) \vdash (p \barwedge r) \vee s}\,(\vee d)$$

   Quelle est la taille de cette dérivation π_1 ?

7. On pose $\Delta = \{\{p \overline{\wedge} (r \vee s)\}\}$ et $A = (p \overline{\wedge} r) \vee s$. Transformer la dérivation π_1 de $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} A$ du point précédent en une dérivation π_2 de $\mathtt{T}(\Delta) \vdash_{\mathcal{G}} \mathtt{T}(A)$. Quelle est la taille de cette nouvelle dérivation ? A t'on $\mathtt{size}(\pi_1) \leq \mathtt{size}(\pi_2) \leq 2 * \mathtt{size}(\pi_1)$?
8. Montrer plus généralement que pour toute dérivation π_1 de $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \Gamma$ dans $\mathcal{N}$, Δ et Γ étant des multi-ensembles pouvant contenir le connecteur $\overline{\wedge}$, il existe une dérivation π_2 de $\mathtt{T}(\Delta) \vdash_{\mathcal{G}} \mathtt{T}(\Gamma)$ telle que $\mathtt{size}(\pi_1) \leq \mathtt{size}(\pi_2) \leq 2 * \mathtt{size}(\pi_1)$
Raisonner par induction sur la dérivation de $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \Gamma$.

Annexe

$$\frac{}{\Delta, A \vdash A}\,(Ax) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \to B}\,(\to i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash A \to B}{\Delta \vdash B}\,(\to e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\,(\wedge i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\,(\wedge e) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\,(\wedge e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\,(\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\,(\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\,(\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \quad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\,(\neg i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\,(\neg e) \qquad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A}\,(\neg e)$$

FIGURE 1 – Les règles de la déduction naturelle pour le calcul propositionnel

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A}\,(ax)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\,(\neg\, g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\,(\neg\, d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\,(\to\, g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\,(\to\, d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\,(\wedge\, g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\,(\wedge\, d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\,(\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\,(\vee d)$$

FIGURE 2 – Les règles du système $\mathcal{G}$ pour le calcul propositionnel

Axiomes : Soit Δ un ensemble de clauses.

$$\frac{}{C}\ (C \in \Delta)$$

Règles d'inférence : D et C sont des clauses, p une lettre propositionnelle

$$\frac{D \vee p \quad C \vee \neg p}{D \vee C}\ \text{(coupure)}$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p}\ \text{(factorisation)} \qquad \frac{D \vee \neg p \vee \neg p}{D \vee \neg p}\ \text{(factorisation)}$$

Remarque : Un cas particulier de la règle de coupure est $\dfrac{p \quad \neg p}{\text{False}}$

FIGURE 3 – Les règles de la résolution pour le calcul propositionnel

Variables $\mathcal{X}$, symboles de fonction Σ_F, symboles de prédicats Σ_P, signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$.

Termes :

$$\frac{x \in \mathcal{X}}{x \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad f/n \in \Sigma_F}{f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

Atomes :

$$\frac{t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad p/n \in \Sigma_P}{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

Formules :

$$\frac{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{\neg A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

$$\frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \to B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \vee B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{A, B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}{A \wedge B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

$$\frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}}{\forall x.A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \quad x \in \mathcal{X}}{\exists x.A \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}}$$

FIGURE 4 – La syntaxe du calcul des prédicats