Université Paris Diderot – L3 Informatique 19 Mai 2017

Examen final (durée : 3h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1 [Unification (5 points)] Nous rappelons les règles de l'algorithme d'unification vu en cours dans l'appendice. Nous considérons une signature $\Sigma_F = \{a/0, g/1, f/2\}$ et des variables x, y, z, ...

1. Donner l'unificateur principale τ du problème $\mathcal{P}_1 = \{f(x,a) \doteq f(y,z)\}$.
2. Donner un unificateur du même problème $\mathcal{P}_1$ qui ne soit pas principal. Comment obtient-on cet unificateur à partir de l'unificateur principal τ du point précédent et de l'opération de composition ?
3. En appliquant l'algorithme vu en cours, calculer l'unificateur principal du problème $\mathcal{P}_2 = \{g(f(g(w), f(y,x))) \doteq g(f(x, f(y, g(z))))\}$.
4. Exhiber un problème d'unification $\mathcal{P}_3$ tel que l'application de l'algorithme vu en cours produit un unificateur principal en utilisant exactement deux fois la règle décomposer, une fois la règle remplacer, deux fois la règle effacer et une fois la règle orienter (pas forcément dans cet ordre).

Exercice 2 [Résolution (5 points)]

1. Soit une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0\}$ et $\Sigma_P = \{r/2, p/2\}$.
   Donner l'ensemble de clauses associé à la formule suivante en donnant les détails de toutes les étapes de votre calcul :
   $$A = [\exists x.\forall y.r(x,y)] \to [\exists z.(p(a,z) \wedge p(z,a))]$$
2. Soit une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0, b/0, f/1\}$ et $\Sigma_P = \{p/2, q/2\}$. Soit l'ensemble de clauses
   $$\mathcal{C} = \{p(a, f(a)),\ \neg p(x_1, f(x_1)) \vee q(x_2, f(x_1)),\ \neg q(a, f(x_3)) \vee p(f(x_3), f(f(x_3))),\ \neg p(b, f(a)),\ \neg p(f(x_4),\ f(f(x_4))) \vee \neg p(x_5, f(x_5))\}.$$
   En utilisant la méthode de résolution (voir les règles dans l'appendice), montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est insatisfaisable. Donner tous les unificateurs calculés pendant votre résolution.

Exercice 3 [Gentzen (5 points)] On considère une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{f/1\}$ et $\Sigma_P = \{p/1, q/1, r/3, s/2\}$.

1. Soient les formules $A = \forall x.(p(x) \wedge q(x))$ et $B = \forall x.(\neg p(x) \wedge \neg q(x))$. Démontrer que la formule $C = [\exists x.p(x) \wedge \exists x.\neg q(x)] \rightarrow [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ est valide en utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats (les règles sont rappelées dans l'appendice).

2. Considérons une dérivation ayant la forme suivante :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{p(x) \vdash \exists y.r(x,y,z), \forall x.s(x,f(x))}\ (\text{règle } 1)}{p(x) \vdash \exists y.r(x,y,z), \exists y.\forall x.s(x,y)}\ (\text{règle } 2)}{p(x) \vdash \exists y.\exists z.r(x,y,z), \exists y.\forall x.s(x,y)}\ (\text{règle } 3)}{p(x) \vdash \forall x.\exists y.\exists z.r(x,y,z), \exists y.\forall x.s(x,y)}\ (\text{règle } 4)
$$

   (a) Identifier toutes les erreurs dans la partie visible de cette dérivation. Justifier.

   (b) Corriger la partie visible de cette dérivation afin que le séquent de la conclusion soit toujours $p(x) \vdash \forall x.\exists y.\exists z.r(x,y,z), \exists y.\forall x.s(x,y)$ (mais vous avez donc le droit de modifier tous les autres séquents apparaissant dans la partie visible de la dérivation). Donner le nom de chaque règle appliquée, en expliquant pourquoi elle peut être appliquée (penser au renommage).

Exercice 4 [Modèles (5 points)] Pour les deux questions suivantes on considère une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{a/0, b/0, s/1\}$ et $\Sigma_P = \{p/1, e/2, r/3\}$.

1. Evaluer les formules A_i $(i = 1,2,3)$ dans l'interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathbb{Z}, I \rangle$, où $I(a) = 0$, $I(b) = -1$, $I(s)(n) = -7 * n$ et $I(e) = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Justifier les pas les plus importants de votre calcul.

$$
\begin{array}{lcl}
A_1 & = & \forall x.\exists y.e(x, s(y)) \\
A_2 & = & [\exists x.e(x, s(x))] \vee [\exists x.e(x, s(b))] \\
A_3 & = & \forall x.[(e(x,a) \wedge \neg e(x,a)) \rightarrow e(x, s(a))]
\end{array}
$$

2. Soit la formule $A = \forall x.\exists y.[p(x) \rightarrow (r(x,y,s(z)) \wedge r(a,y,x))]$. On considère ici des nouvelles interprétations indépendantes de celle du point précédent.

   (a) Compléter l'interprétation $\mathcal{I}_1 = \langle \mathbb{N}, I_1 \rangle$, où $I_1(p) = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, 10\}$ pour qu'elle soit un modèle de la formule A. Justifier.

   (b) Compléter l'interprétation $\mathcal{I}_2 = \langle \mathbb{N}, I_2 \rangle$, où $I_2(p) = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, 10\}$ pour qu'elle falsifie la formule A. Justifier.

   (c) Compléter l'interprétation $\mathcal{I}_3 = \langle \mathbb{N}, I_3 \rangle$, où $I_3(p) = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, 10\}$ pour qu'elle satisfasse la formule A sans en être un modèle. Justifier.

Appendice

Règles d'unification

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \text{(orienter)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}} \text{(décomposer)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \text{(effacer)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}} \text{(remplacer)}$$

Règles de résolution

Axiomes :

$$\frac{}{C} \text{($C \in \Delta$, où Δ est l'ensemble de clauses).}$$

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \ (coupure)$$

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \vee r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee r(s_1, \ldots, s_n))} \ (fact) \qquad \frac{D \vee \neg r(s_1, \ldots, s_n) \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee \neg r(s_1, \ldots, s_n))} \ (fact)$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ et les clauses C et D ne partagent pas de variables.

Système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A} \ (ax)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma} \ (\neg g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A} \ (\neg d) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma} \ (\to g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma} \ (\to d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma} \ (\wedge g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma} \ (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma} \ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} \ (\vee d)$$

$$\frac{\Delta, \{x \leftarrow t\}(A), \forall x.A \vdash \Gamma}{\Delta, \forall x.A \vdash \Gamma} \ (\forall g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash \forall x.A, \Gamma} \ (\forall d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta, \exists x.A \vdash \Gamma} \ (\exists g) \qquad \frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A), \exists x.A, \Gamma}{\Delta \vdash \exists x.A, \Gamma} \ (\exists d)$$

Dans les règles ($\forall$ d) et ($\exists$ g) x n'est libre ni dans Δ ni dans Γ; dans les règles ($\forall$ g) et ($\exists$ d) l'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas de variables (aucune variable de t devient liée).