Devoir Maison de Logique n° 2

(Correction)

Calcul des prédicats

Exercice 1 [Exercice 7 de la feuille de TD6]
On prend comme domaine l'ensemble des robots de la planète Schtark, dans cette planète tout robot a un "juge", éventuellement lui-même, qui sanctionne ses mauvaises actions. On considère les symboles de fonctions $\Sigma_F = \{\, j/1, \mathtt{rt}/0 \,\}$ où :

$j(x)$ dénote le "juge" de x ;
$\mathtt{rt}$ dénote le robot RT ;

et les symboles de prédicats $\Sigma_P = \{\, p/1, r/1, c/2 \,\}$ où :

$p(x)$ " x est en panne " ;
$r(x)$ " x a des roues " ;
$c(x, y)$ " x comprend le langage de y ".

1. Traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :
   (a) le juge de RT est en panne ;
   (b) les juges de tous les robots qui ont des roues sont en panne ;
   (c) tous les robots sans roue qui comprennent au moins un robot qui a des roues sont en panne ;
   (d) RT ne comprend pas tous les robots en panne.

   Correction:
   (a) $p(j(\mathtt{rt}))$
   (b) $\forall x.\ (r(x) \to p(j(x)))$
   (c) $\forall x.\ [[\neg r(x) \wedge \exists y.\ (r(y) \wedge c(x, y))] \to p(x)]$
   (d) $\neg \forall x.\ (p(x) \to c(rt, x))$ ou $\exists x.\ (p(x) \wedge \neg c(\mathtt{rt}, x))$

2. Exprimez en français les formules suivantes
   (a) $\forall x.\ (r(x) \to p(x))$
   (b) $\exists x.\ (r(x) \wedge c(x, \mathtt{rt}))$
   (c) $\forall x.\ (c(x, j(x)) \to c(x, \mathtt{rt}))$
   (d) $\neg \exists x.\ c(x, j(\mathtt{rt}))$

   Correction:
   (a) tous les robots à roues sont en panne
   (b) il existe un robot à roues qui comprend RT
   (c) tous les robots qui comprennent leur propre juge comprennent RT
   (d) il n'existe aucun robot qui comprenne le juge de RT

3. On précise maintenant l'interpétation $\mathcal{I} = \langle D, I \rangle$ de l'énoncé de la manière suivante : Le domaine est $D = \{AX, BY, CZ, RT\}$ et la fonction I est donnée par :
   - $I(\mathtt{rt}) = RT$,
   - $I(j) = \{AX \mapsto CZ, BY \mapsto RT, CZ \mapsto CZ, RT \mapsto AX\}$,
   - $I(p) = \{BY\}$,
   - $I(r) = \{BY, CZ\}$,
   - $I(c) = \{(AX, AX), (AX, BY), (BY, CZ), (RT, CZ), (CZ, RT))\}$.

   Interprétez chacune des formules de la question 2. Puis interprétez les deux formules suivantes :

   (a) $\forall x.(r(x) \to \exists y.\ c(y, x))$
   (b) $\exists x.\ (p(x) \wedge (r(y) \to c(x, j(y)))$ avec les valuations pour y, $\sigma_1(y) = AX$ et $\sigma_2(y) = RT$

   Correction:

   Formules de la question 2

   (a) $\forall x.\ (r(x) \to p(x))$:
   On remarque que $[r(x) \to p(x)]_{\mathcal{I}[x:=CZ]} = F$ (car $\mathcal{I}(r)(CZ) = V$ et $\mathcal{I}(p)(CZ) = F$).
   Donc $[\forall x.(r(x) \to p(x))]_{\mathcal{I}} = F$.

   (b) $\exists x.\ (r(x) \wedge c(x, \mathtt{rt}))$:
   On remarque que $[(r(x) \wedge c(x, \mathtt{rt})]_{\mathcal{I}[x:=CZ]} = V$
   Donc $[\exists x.\ (r(x) \wedge c(x, \mathtt{rt}))]_{\mathcal{I}} = V$.

   (c) $\forall x.\ (c(x, j(x)) \to c(x, \mathtt{rt}))$:
   On remarque que pour tout élement d du domaine D on a $[c(x, j(x))]_{\mathcal{I}[x:=d]} = F$ (en effet, $\mathcal{I}(c)(AX, \mathcal{I}(j)(AX)) = \mathcal{I}(c)(AX, CZ) = F$, $\mathcal{I}(c)(BY, \mathcal{I}(j)(BY)) = \mathcal{I}(c)(BY, RT) = F$, ...)
   Donc pour tout élement d du domaine D, on a $[c(x, j(x)) \to c(x, \mathtt{rt})]_{\mathcal{I}[x:=d]} = V$
   Donc $[\forall x.\ (c(x, j(x)) \to c(x, \mathtt{rt}))]_{\mathcal{I}} = V$.

   (d) $\neg \exists . x\ c(x, j(\mathtt{rt}))$
   On remarque que $[c(x, j(\mathtt{rt})]_{\mathcal{I}[x:=AX]} = V$ (en effet, $\mathcal{I}(c)(AX, \mathcal{I}(j)(\mathcal{I}(\mathtt{rt}))) = \mathcal{I}(c)(AX, AX) = V$)
   Donc $[\exists . x\ c(x, j(\mathtt{rt}))]_{\mathcal{I}} = V$ et donc $[\neg \exists . x\ c(x, j(\mathtt{rt}))]_{\mathcal{I}} = F$

   Formules supplémentaires

   (a) $\forall x.(r(x) \to \exists y.\ c(y, x))$
   On regarde l'interprétation de la formule sans le $\forall$ pour toute les valeurs du domaine :
   - $[(r(x)]_{\mathcal{I}[x:=AX]} = F$ donc $[(r(x) \to \exists y.\ c(y, x)]_{\mathcal{I}[x:=AX]} = V$
   - de la même façon $[(r(x)]_{\mathcal{I}[x:=RT]} = F$ donc $[(r(x) \to \exists y.\ c(y, x)]_{\mathcal{I}[x:=RT]} = V$
   - $[c(y, x)]_{\mathcal{I}[x:=BY][y:=AX]} = V]$ donc $[\exists y.c(y, x)]_{\mathcal{I}[x:=BY]} = V]$ donc $[(r(x) \to \exists y.\ c(y, x)]_{\mathcal{I}[x:=BX]} = V$
   - de la même façon, on a $[c(y, x)]_{\mathcal{I}[x:=CZ][y:=RT]} = V$ donc $[(r(x) \to \exists y.\ c(y, x)]_{\mathcal{I}[x:=CZ]} = V$

   On a donc $[\forall x.(r(x) \to \exists y.\ c(y, x))]_{\mathcal{I}} = V$

   (b) $\exists x.\ (p(x) \wedge (r(y) \to c(x, j(y)))$ avec les valuations pour y, $\sigma_1(y) = AX$ et $\sigma_2(y) = RT$
   - si $\sigma_1(y) = AX$:
     On a $[(p(x) \wedge (r(y) \to c(x, j(y)))]_{\mathcal{I}, \sigma_1[x:=BY]} = V$ donc $[\exists x.\ (p(x) \wedge (r(y) \to c(x, j(y)))]_{\mathcal{I}} = V$
   - si $\sigma_1(y) = RT$: C'est similaire :
     On a $[(p(x) \wedge (r(y) \to c(x, j(y)))]_{\mathcal{I}, \sigma_2[x:=BY]} = V$ donc $[\exists x.\ (p(x) \wedge (r(y) \to c(x, j(y)))]_{\mathcal{I}} = V$

Exercice 2 [Exercice 4 de la feuille de TD7]
Soit Σ une signature avec $\Sigma_P = \{ p/2, q/1 \}$ et $\Sigma_F = \{ a/0, f/1, g/2 \}$.
Soit $\mathcal{I}$ une interprétation telle que son domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(a) := 0$, $\mathcal{I}(f)(n) := n + 1$, $\mathcal{I}(p)(n, m) :\Leftrightarrow (n = m)$. Pour chacun des ensemble de formules T suivants, complétez $\mathcal{I}$ de deux façons différentes afin qu'elle soit un modèle de T.

1. $T_1 = \{ \forall x.\forall y.p(g(x, y), g(y, x)) \}$;
   Correction: T_1 demande que g soit une fonction commutative, il y a donc beaucoup d'exemples. Par exemple, $\mathcal{I}(g)(n, m) := n + m$, $\mathcal{I}(g)(n, m) := n \times m$, $\mathcal{I}(g)(n, m) := min(n, m)$, $\mathcal{I}(g)(n, m) := max(n, m)$, etc.
2. $T_2 = \{ \exists x.q(x), \exists x.\neg q(x), \forall x.(q(x) \to q(f(f(x)))) \}$;
   Correction: Des exemples sont $\mathcal{I}(q) := 2\mathbb{N}$ (nombres pairs), ou bien $\mathcal{I}(q) := 2\mathbb{N} + 1$ (nombres impairs). On peut aussi prendre $\mathcal{I}(q) := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ou des intersections entre $[n, +\infty)$ et un autre modèle quelconque.
3. $T_3 = T_1 \cup T_2 \cup \{ \forall x.\forall y.((q(x) \wedge \neg q(y)) \to q(g(x, y)) \}$;
   Correction: En réutilisant les précédents, on peut prendre
   - $\mathcal{I}(q) := 2\mathbb{N} + 1$ et $\mathcal{I}(g)(n, m) := n + m$;
   - $\mathcal{I}(q) := 2\mathbb{N}$ et $\mathcal{I}(g)(n, m) := n \cdot m$.
4. $T_4 = T_1 \cup \{ \forall x.[q(x) \leftrightarrow (\neg p(x, a) \wedge \neg p(x, f(a)) \wedge \forall y.\forall z.(p(x, g(y, z)) \to (p(x, y) \vee p(x, z))))] \}$.
   Correction: Si on prend $\mathcal{I}(g)(n, m) := n \cdot m$, on peut prendre $\mathcal{I}(q) := 2\mathbb{N}$ les premiers. Sinon on peut prendre $\mathcal{I}(q) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\mathcal{I}(g) = \max$ ou min.

Exercice 3 [Exercice 5 de la feuille de TD7.]
Soit A une formule telle que $x \in VI(A)$. On veut démontrer que « A valide implique $\{x \leftarrow u\}A$ valide».
On se donne un ensemble $\mathcal{X}$ de variables, Σ une signature, $x \in \mathcal{X}$ une variable, $u \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ un terme, $\mathcal{I}$ une interprétation et σ une valuation.

1. Montrez que :
   « Pour tout terme $t \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $[\{x \leftarrow u\}t]_{\mathcal{I},\sigma} = [t]_{\mathcal{I},\sigma'}$ où $\sigma' = \sigma[x := [u]_{\mathcal{I},\sigma}]$.»
   Raisonner par induction structurelle sur le terme t.
   Correction:

   Important : On rappelle que l'on ne peut appliquer une substitution $\{x \leftarrow u\}$ à une formule que si aucune des variables de u ne peuvent se retrouver liées par un quantificateur de la formule. On suppose donc qu'un renommage ad hoc de la formule a été fait pour éviter ceci.
   On raisonne par induction sur la structure du terme t :
   - Cas de base : $t = y$ où y est une variable. Si $x \neq y$, alors $[\{x \leftarrow u\}y]_{\mathcal{I},\sigma} = [y]_{\mathcal{I},\sigma} = [y]_{\mathcal{I},\sigma'}$.
     Si $t = x$, alors $\{x \leftarrow u\}t = u$. D'où $[t]_{\mathcal{I},\sigma} = [u]_{\mathcal{I},\sigma} = [x]_{\mathcal{I},\sigma'}$
   - Cas inductif :
     Hypothèse d'induction (HI) : On suppose que la propriété est vraie pour tout sous-terme de t.
     Soit $t = f(t_1, \ldots, t_n)$. Par hypothèse d'induction, pour tout i on a $[\{x \leftarrow u\}t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = [t_i]_{\mathcal{I},\sigma'}$.
     Or,

$$\begin{aligned}
[\{x \leftarrow u\}t]_{\mathcal{I},\sigma} &= [f(\{x \leftarrow u\}t_1, \ldots, \{x \leftarrow u\}t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} \\
&= I(f)([\{x \leftarrow u\}t_1]_{\mathcal{I},\sigma}, \ldots, [\{x \leftarrow u\}t_n]_{\mathcal{I},\sigma}\}) \\
&= I(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma'}, \ldots, [t_n]_{\mathcal{I},\sigma'}\}) \qquad \text{(par HI)} \\
&= [f(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma'}.
\end{aligned}$$

2. Montrez que :
   « Pour toute formule $B \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $[\{x \leftarrow u\}B]_{\mathcal{I},\sigma} = [B]_{\mathcal{I},\sigma'}$ où $\sigma' = \sigma[x := [u]_{\mathcal{I},\sigma}]$.»
   Raisonner par induction structurelle sur la formule B.
   Correction: On raisonne par induction sur la structure de la formule A. On prend comme hypothèse d'induction (HI) que la propriété à démontrer est vraie pour toute sous-formule B de A.
   - Cas de base : A est un atome de la forme $p(t_1, \ldots, t_n)$ où les t_i sont des termes et p un symbole de prédicat.
     $[\{x \leftarrow u\}t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = [t_i]_{\mathcal{I},\sigma'}$ En utilisant la question précédente on a $[\{x \leftarrow u\}t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = [t_i]_{\mathcal{I},\sigma'}$.

$$\begin{aligned}
[\{x \leftarrow u\}p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} &= [p(\{x \leftarrow u\}t_1, \ldots, \{x \leftarrow u\}t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} \\
&= \mathcal{I}(p)([\{x \leftarrow u\}t_1]_{\mathcal{I},\sigma}, \ldots, [\{x \leftarrow u\}t_n]_{\mathcal{I},\sigma}) \\
&= \mathcal{I}(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma'}, \ldots, [t_n]_{\mathcal{I},\sigma'}) \\
&= [p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma'}
\end{aligned}$$

   - Cas inductifs :
     — $A = B \sharp C$, où $\sharp$ est un connecteur binaire. On a alors

$$\begin{aligned}
[\{x \leftarrow u\}(B \sharp C)]_{\mathcal{I},\sigma} &= [\{x \leftarrow u\}B \sharp \{x \leftarrow u\}C)]_{\mathcal{I},\sigma} \\
&= \mathcal{F}_\sharp([\{x \leftarrow u\}B]_{\mathcal{I},\sigma}, [\{x \leftarrow u\}C]_{\mathcal{I},\sigma}) \\
&= \mathcal{F}_\sharp([B]_{\mathcal{I},\sigma'}, [C]_{\mathcal{I},\sigma'}) \qquad \text{(par HI)} \\
&= [B \sharp C]_{\mathcal{I},\sigma'}
\end{aligned}$$

     — Le cas $A = \neg B$ est similaire
     — cas $A = \mathcal{Q}y.\ B$ avec $\mathcal{Q}$ un quantificateur $\forall$ ou $\exists$. On a deux sous-cas
       — $y = x$: (D'après le cours, on devrait faire un renommage ad hoc pour éviter cette situation, mais comme on a vu en TD une autre version équivalente à renommage près, on va traiter ce cas. Il est bien sûr préférable de renommer avant d'appliquer la substitution.)
       On ne substitue que les variables libres, on a donc $\{x \leftarrow u\}(\mathcal{Q}x.\ B) = \mathcal{Q}x.\ B$ et donc $[\{x \leftarrow u\}(\mathcal{Q}x.\ B)]_{\mathcal{I},\sigma} = [(\mathcal{Q}x.\ B)]_{\mathcal{I},\sigma'}$
       — $y \neq x$: On rappelle qu'aucune variable de u ne peut être capturée par le $\mathcal{Q}y$, i.e. y n'apparaît pas dans u. on a donc $\{x \leftarrow u\}(\mathcal{Q}y.\ B) = \mathcal{Q}y.\ (\{x \leftarrow u\}B)$ Donc si $\mathcal{Q}$ est $\forall$

$$\begin{aligned}
[\{x \leftarrow u\}(\forall y.\ B)]_{\mathcal{I},\sigma} &= [\forall y.\ (\{x \leftarrow u\}B)]_{\mathcal{I},\sigma} \\
&= \prod_{d \in \mathcal{D}} [\{x \leftarrow u\}B]_{\mathcal{I},\sigma} \qquad \text{(où } \mathcal{D} \text{ le domaine de } \mathcal{I}) \\
&= \prod_{d \in \mathcal{D}} [B]_{\mathcal{I},\sigma'} \qquad \text{(par HI)} \\
&= [\forall y.\ B]_{\mathcal{I},\sigma'}
\end{aligned}$$

       Le cas $\exists$ se fait en remplaçant $\prod_{d \in \mathcal{D}}$ par $\sum_{d \in \mathcal{D}}$.
3. En déduire le théorème de substitution : «Si $x \in VI(A)$ et A est valide, alors la formule $\{x \leftarrow u\}A$ est aussi valide pour tout terme $u \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$. »
   Correction: Soit A valide. On veut montrer $\{x \leftarrow u\}A$ valide, i.e. toute interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle de $\{x \leftarrow u\}A$, i.e. pour toute interprétation $\mathcal{I}$ et toute valuation σ on a $[\{x \leftarrow u\}A]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$. Mais $[\{x \leftarrow u\}A]_{\mathcal{I},\sigma} = [A]_{\mathcal{I},\sigma'}$ et A est valide, donc $[A]_{\mathcal{I},\sigma'} = \mathbf{V}$, d'où la propriété.